Revista Boliviana de Física **9**, 81–87 (2003)

CONSIDERACIÓN DEL PESO ESTADÍSTICO EN LA GENERACIÓN DE INCERTIDUMBRES DE FUNCIONES REDUCIBLES A PRIMER GRADO AJUSTADAS POR EL MÉTODO DE MÍNIMOS CUADRADOS

Wilton Pereira da Silva[1], Cleide M. D. P. S. e Silva[1],
Diogo D. P. S. e Silva[1] y Cleiton D. P. S. e Silva[2]

[1] *Departamento de Física, Centro de Ciências e Tecnologia, Universidade Federal de Campina Grande, 58109-970, Campina Grande, PB, Brasil*
[2] *Mestrado Eng. Eletrônica, Instituto Tecnológico de Aeronáutica, S J Campos, SP, Brasil*

RESUMEN

La técnica de linealización de las funciones de potencia y exponencial es común en la regresión lineal. Sin embargo, los resultados obtenidos con esa técnica difieren de forma significativa del ajuste no lineal de esas funciones a un conjunto de datos $(X_i; Y_i)$. En este artículo, se discute la consideración de pesos estadísticos para los datos linealizados de esas funciones y tal consideración es extendida a la determinación de la incertidumbre de la función ajustada. Esa técnica de linealización con la inclusión de pesos estadísticos, es aplicada a dos conjuntos de datos y los resultados, tanto para la función ajustada como para su incertidumbre, están en excelente concordancia con la técnica de regresión no lineal.

ABSTRACT

The linearization technique of exponential and power functions is common in linear regression, but the results obtained by this technique differ significantly from those obtained by a non-linear fit of data of the type $(X_i; Y_i)$. In this article, a consideration of the statistical weights of the linearized data is discussed, and that consideration is extended to the determination of the uncertainty of the fitted function. This linearization technique, including statistical weights, is applied to two sets of experimental data and the results, for the fitted function and for its uncertainty, are in excellent agreement with the non-linear fitting technique.

1. INTRODUCCIÓN

En muchos textos sobre ajuste de curvas (ver [1], [2] y [3], por ejemplo) es común un abordaje inicial sobre la linealización de las funciones de potencia y exponencial con el uso de logaritmos al ser ajustadas a datos experimentales del tipo $(X_i; Y_i)$. La expresión "datos del tipo $(X_i; Y_i)$" se debe entender aquí como datos para los cuales sólo están disponibles los valores medios de las coordenadas pero no sus incertidumbres. En general, los resultados obtenidos con la linealización de esas funciones difieren de forma significativa de los resultados obtenidos de sus ajustes con el uso de técnicas no lineales cuando no se toman en cuenta ciertos cuidados. Esto ocurre porque, de la forma como se sugiere la linealización en estos textos, y también como se calcula por algunos paquetes computacionales (ver [4], [5], [6] y [7], por ejemplo), los "puntos linealizados" $(lnX_i; lnY_i)$ para una función de potencia y los puntos $(X_i; lnY_i)$ para una función exponencial, contribuyen para el ajuste con los mismos pesos estadísticos. Naturalmente, a falta de información y considerando que los errores sistemáticos sean despreciables, es más razonable suponer que los puntos originales $(X_i; Y_i)$ tengan la misma incertidumbre, aunque ésta sea desconocida, ya que esos puntos deben haber sido medidos en condiciones experimentales similares. Así, los puntos linealizados deben tener sus propios pesos estadísticos y este artículo discute una forma para que esos pesos estadísticos sean determinados. Más aún, una vez obtenido el conjunto de puntos $(x_i; y_i \pm \sigma_{ymi})$ con $x_i = lnX_i$ para la función potencia, o $x_i = X_i$ para la función exponencial con $y_i = lnY_i$ en ambos casos, siendo σ_{ymi} la incertidumbre del valor medio de y_i, podemos determinar los parámetros de la función de ajuste y asociar una incertidumbre a la función ajustada en total concordancia con la técnica no lineal de regresión. A pesar de que esto ya ha sido hecho en la referencia [8], los resultados que obtienen no concuerdan muy bien con la técnica no lineal porque en dicha referencia se atribuye el mismo peso estadístico a todos los puntos linealizados. Con el objetivo de presentar una nueva técnica de linealización en concordancia con la técnica no lineal de ajuste, haremos un breve estudio del problema de la regresión de una función de primer grado a puntos de tipo $(x_i; y_i)$ y también a puntos del tipo $(x_i; y_i \pm \sigma_{ymi})$. Hay que resaltar, una vez

[2]Email: `wiltonps@uol.com.br`

más, que la determinación de los parámetros de las funciones potencia y exponencial, así como la determinación de la incertidumbre para esas funciones ha sido hecha en la referencia [8], pero en aquellas determinaciones se asocia una incertidumbre común a todos los puntos experimentales linealizados, y aquí nosotros corregiremos esta distorsión.

Es bueno observar que en las discusiones anteriores, implícitamente admitimos que los X_i originales están exentos de error, lo que nos permite hablar de linealización sin asociarles una incertidumbre, como hacemos con los Y_i. Mientras tanto, los resultados que obtendremos son válidos aun cuando hubiesen incertidumbres en X_i sólo que, en este caso, habría que transferir las incertidumbres de X a Y.

2. AJUSTE DE UNA RECTA A PUNTOS EXPERIMENTALES

Inicialmente vamos a presentar las soluciones para el ajuste de una recta a puntos del tipo $(x_i; y_i)$ y después a puntos de la forma $(x_i; y_i \pm \sigma_{ymi})$. Antes, conviene destacar que, a lo largo del artículo, admitiremos las siguientes hipótesis: 1) los errores sistematicos involucrados en las medidas pueden considerarse despreciables; 2) los cálculos de los errores propagados pueden hacerse usando aproximaciones de primer orden; 3) las fluctuaciones estadísticas de los puntos en torno de la función ajustada pueden ser consideradas gaussianas; 4) las medidas originales de Y_i tienen la misma incertidumbre, aunque desconocida, en tanto que los X_i no tienen error.

2.1. *Ajuste de una recta a puntos con incertidumbre desconocida.*

Para puntos del tipo $(x_i; y_i)$, el método de los mínimos cuadrados de ajuste a una función lineal $y(x) = ax + b$ da las siguientes expresiones para los parámetros a y b [1], [2], [8]:

$$a = \frac{1}{D}[N\sum_{i=1}^{N} x_i y_i - \sum_{i=1}^{N} y_i \sum_{j=1}^{N} x_j] \tag{1}$$

y

$$b = \frac{1}{D}[\sum_{i=1}^{N} y_i \sum_{j=1}^{N} x_j^2 - \sum_{i=1}^{N} x_i y_i \sum_{j=1}^{N} x_j], \tag{2}$$

donde

$$D = N\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - (\sum_{i=1}^{N} x_i)^2. \tag{3}$$

Para las incertidumbres de los parámetros ajustados así como para la covarianza entre ellos, se puede escribir [2], [8]:

$$\sigma_{am} = \sigma_{y(x)}\sqrt{\frac{N}{D}}, \tag{4}$$

$$\sigma_{bm} = \sigma_{y(x)}\sqrt{\frac{1}{D}\sum_{i=1}^{N} x_i^2}, \tag{5}$$

$$cov(a,b) = -\frac{\sigma_{y(x)}^2}{D}\sum_{i=1}^{N} x_i, \tag{6}$$

donde $\sigma_{y(x)}^2$ es la varianza del ajuste de la recta a los puntos y está dada por

$$\sigma_{y(x)}^2 = \frac{1}{N-2}\sum_{i=1}^{N}(y_i - ax_i - b)^2. \tag{7}$$

Aquí es bueno enfatizar, una vez más, que admitimos, como implícitamente se acepta en la referencia [8], las hipótesis señaladas al inicio de §2.

El anterior conjunto de ecuaciones se utilizó en la referencia [8] para ajustar funciones exponenciales a datos experimentales, pero los resultados obtenidos con la linealización de esas funciones no concuerdan muy bien con la técnica de ajuste no lineal. El mérito en dicha referencia fue establecer una incertidumbre para las funciones ajustadas por propagación de errores de acuerdo a las siguientes expresiones:

i. para $Y(X) = ae^{bX}$, la incertidumbre de la función ajustada, determinada por propagación de errores en a y b, es

$$\begin{aligned} V^2 &= (Xe^{bX+C}\sigma_b)^2 + (e^{bX+C}\sigma_C)^2, \\ \sigma_{Y(X)m} &= \sqrt{V^2 + 2Xe^{2(bX+C)}cov(b,C)} \end{aligned} \tag{8}$$

donde $C = ln(a)$;

ii. para $Y(X) = aX^b$, la incertidumbre de la función ajustada, determinada por propagación de errores en a y b, está dada por

$$\begin{aligned} V^2 &= (ln(X)e^{bln(X)+C}\sigma_b)^2 + (e^{bln(X)+C}\sigma_C)^2, \\ \sigma_{Y(X)m} &= \sqrt{V^2 + 2ln(X)e^{2(bln(X)+C)}cov(b,C)} \end{aligned} \tag{9}$$

donde, nuevamente, $C = ln(a)$.

Dada la función exponencial $Y(X) = ae^{bX}$, por linealización se obtiene $ln(Y(X)) = bX + ln(a)$. Entonces, la función original puede ser reescrita en la forma $Y(X) = e^{bX+ln(a)}$. Así, la Ec. (8) puede obtenerse por propagación de errores en esta última expresión. De la misma forma, la Ec. (9) se obtiene por propagación de errores en la función potencia, escrita del siguiente modo: $Y(X) = e^{bln(X)+ln(a)}$. Este fue el razonamiento empleado en la referencia [8] para obtener las Ecs. (8) y (9). En los cálculos realizados en la referencia [8], quedó abierta la inclusión de pesos estatísticos propios para cada uno de los puntos experimentales linealizados. A todos ellos se les asocia la misma incertidumbre, igual que a la raiz cuadrada de la varianza del ajuste dada por la Ec. (7). Para que esa inclusión pueda hacerse, necesitamos conocer la compilación que se da a continuación.

2.2. *Ajuste de una recta con puntos de incertidumbres conocidas.*

Para puntos del tipo $(x_i; y_i \pm \sigma_{ymi})$, el método de los mínimos cuadrados da las seguientes expresiones, cuando se aplica a la función $y(x) = ax + b$ (ver [2] y [3], por ejemplo):

$$a = \frac{1}{D}[\sum_{i=1}^{N} \frac{x_i y_i}{\sigma_{ymi}^2} \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{\sigma_{ymj}^2} - \sum_{i=1}^{N} \frac{x_i}{\sigma_{ymi}^2} \sum_{j=1}^{N} \frac{y_j}{\sigma_{ymj}^2}] \qquad (10)$$

y

$$b = \frac{1}{D}[\sum_{i=1}^{N} \frac{x_i^2}{\sigma_{ymi}^2} \sum_{j=1}^{N} \frac{y_j}{\sigma_{ymj}^2} - \sum_{i=1}^{N} \frac{x_i}{\sigma_{ymi}^2} \sum_{j=1}^{N} \frac{x_j y_j}{\sigma_{ymj}^2}], \qquad (11)$$

donde

$$D = \sum_{i=1}^{N} \frac{x_i^2}{\sigma_{ymi}^2} \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{\sigma_{ymj}^2} - (\sum_{i=1}^{N} \frac{x_i}{\sigma_{ymi}^2})^2. \qquad (12)$$

Las incertidumbres de los parámetros a y b y la covarianza entre ellos están dadas, respectivamente, por las expresiones:

$$\sigma_{am} = \sqrt{\frac{1}{D} \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\sigma_{ymi}^2}}, \qquad (13)$$

Análogamente obtenemos:

$$\sigma_{bm} = \sqrt{\frac{1}{D} \sum_{i=1}^{N} \frac{x_i^2}{\sigma_{ymi}^2}} \qquad (14)$$

y

$$cov(a,b) = -\frac{1}{D} \sum_{i=1}^{N} \frac{x_i}{\sigma_{ymi}^2}, \qquad (15)$$

donde, nuevamente, D está dada por la Ec. (12). A la expresión $1/\sigma_{ymi}^2$ se le da el nombre de peso estadístico del i-ésimo punto experimental.

Debemos observar que estas expresiones son mucho más generales que las del ítem anterior, por considerar las incertidumbres de los puntos experimentales que se ajustan a una recta. Así, debemos esperar resultados mucho mejores al sustituir los valores obtenidos a través de las equaciones (10) a (15) en las Ecs. (8) y (9). Veamos, entonces, cómo considerar esas incertidumbres σ_{ymi} para los puntos linealizados, cuando los puntos originales $(X_i;Y_i)$, que se ajustan a las funciones potencia y exponencial, no poseen pesos estadísticos conocidos.

3. DETERMINACIÓN DE LOS PESOS ESTADÍSTICOS PARA LOS PUNTOS LINEALIZADOS

Conforme ya indicamos, el propósito de este artículo es el de utilizar pesos estadísticos para los puntos linealizados, cuando los puntos originales no poseen incertidumbres conocidas, tanto en la determinación de la función ajustada como en el cálculo de su incertidumbre. Antes, conviene resaltar que las equaciones (10) a (12) se reducen a las equaciones (1) a (3) cuando hacemos los $\sigma_{ymi} = 1$. Por otro lado, como sólo conocemos inicialmente los valores medios de los puntos originales, y no sus incertidumbres, podemos hacer un ajuste aproximado, esto es, un pre-ajuste de la recta a los puntos $(x_i;y_i)$, siendo $x_i = X_i$ en la función exponencial y $x_i = ln(X_i)$ en la función potencia, y $y_i = ln(Y_i)$ en los dos casos. En este pre-ajuste debemos utilizar las Ecs. (1) y (2) para calcular los parámetros de las funciones de ajuste. Aunque ese cálculo sea apenas aproximado, ya que no considera los σ_{ymi} (por ser desconocidos), él nos permite determinar la varianza del ajuste dada por (ver [2], [8] y [9], por ejemplo):

$$\sigma_{Y(X)}^2 = \frac{1}{N-2} \sum_{i=1}^{N} [Y_i - Y(X_i)]^2. \qquad (16)$$

La raíz cuadrada de esta varianza nos da una medida de las incertidumbres de los puntos originales, por lo que es razonable admitir que los σ_{ymi} de los puntos originales (siendo éstos desconocidos) sean iguales a $\sigma_{Y(X)}$. Eso permite que el χ-cuadrado reducido del ajuste sea igual a 1, lo que hace el ajuste lo más verosímil posible. Este fue el procedimiento utilizado en la referencia [8] para determinar la incertidumbre de los parametros ajustados y la covarianza entre ellos, pero allí, la varianza calculada fue la de los puntos linealizados, $\sigma_{Y(X)}^2$. Aquí haremos nuestra contribución a dicho procedimiento. Si los puntos originales poseen una incertidumbre común $\sigma_{Y(X)}$, entonces los puntos linealizados deben poseer incertidumbres que pueden ser calculadas por propagación de errores, conforme se sugiere en [10] y en [11]. Así, recordando que estamos admitiendo que los X_i originales están exentos de errores, tendremos para la linealización de las ordenadas:

$$y_i = ln(Y_i). \qquad (17)$$

Luego, podemos utilizar la fórmula general para propagación de errores que, para este caso, está dada por

$$\sigma_{ymi} = \frac{dln(Y_i)}{dY_i} \sigma_{Ymi}. \qquad (18)$$

Aquí, debemos resaltar que estamos admitiendo que una aproximación de primer orden se puede hacer en el cálculo del error propagado. Entonces, considerando que los puntos originales tengan las mismas incertidumbres σ_{Ymi}, y que éstas sean iguales a $\sigma_{Y(X)}$ (calculadas por la Ec. (16)) podemos finalmente escribir:

$$\sigma_{Ymi} = \frac{\sigma_{Y(X)}}{Y_i}. \qquad (19)$$

La expresión anterior deja claro que con este proceso de linealización la incertidumbre de $y_i = ln(Y_i)$ está dada por el desvío relativo de Y_i . Así, cuanto mayor sea Y_i, menor será la incertidumbre de $y_i = ln(Y_i)$ y, consecuentemente, mayor será el peso estadístico de ese punto en el ajuste de la recta, y eso es bastante razonable en

TABLA 1

CIRCUITO RC (CORRIENTE ELÉCTRICA I VERSUS TIEMPO DE CARGA T)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$t(s)$	10.0	20.0	30.0	40.0	50.0	60.0	70.0	80.0	90.0	100.0
$i(\mu A)$	45.8	41.4	37.7	34.1	30.9	28.9	25.5	23.1	21.0	19.2

TABLA 2

PÉNDULO SIMPLE (PERIODO T VERSUS LONGITUD DEL PÉNDULO L)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$T(s)$	0.637	0.880	1.082	1.250	1.407	1.534	1.667	1.773	1.894	1.971
$L(cm)$	10.0	20.0	30.0	40.0	50.0	60.0	70.0	80.0	90.0	100.0

ausencia de mayores informaciones sobre las incertidumbres de las ordenadas de los puntos originales.

Lo que haremos en este artículo es utilizar la Ec. (19) para determinar los pesos estadísticos de los puntos linealizados. Esto nos permitirá no sólo la determinación de los parámetros de la función ajustada, como se sugiere en [10] y [11], sino también el cálculo correcto de la incertidumbre de esa función, corrigiendo lo que se hace en la referencia [8].

Las Ecs. (17) y (19) permiten armar una “nueva tabla linealizada”, con puntos del tipo $(x_i; yi \pm \sigma_{ymi})$, a los que podemos aplicar las Ecs. (10)—(15), que incluyen el efecto de las incertidumbres de los puntos linealizados en el ajuste de la recta. Así, las incertidumbres de las funciones originales ajustadas pueden ser obtenidas a través de las Ecs. (8) y (9).

4. ANÁLISIS COMPARATIVO DE LOS AJUSTES CONSIDERANDO (Y SIN CONSIDERAR) LOS PESOS ESTADÍSTICOS DE LOS PUNTOS LINEALIZADOS

Ya que estamos proponiendo un refinamiento en la técnica utilizada en la referencia [8] para la determinación de parámetros y generación de intervalos de incertidumbre en torno de la función ajustada, utilizaremos los mismos datos experimentales de aquel artículo. Ello nos permitirá hacer un análisis comparativo de los resultados obtenidos a través de las dos técnicas de linealización.

La forma para definir cuál de las dos técnicas de linealización es la mejor es bastante simple: basta comparar los resultados obtenidos por estas técnicas con los resultados obtenidos a través de la regresión no lineal. Para tal efecto, vamos a presentar los conjuntos de datos de la referencia [8]. El primero se refiere a un circuito RC en el que se midió la corriente i a lo largo de el tiempo t de carga del capacitor, conforme muestra la Tabla 1. El segundo conjunto de datos se refiere a un péndulo simple, en que se midió el periodo de las oscilaciones en función de la longitud del péndulo, conforme muestra la Tabla 2. Como los experimentos son relativamente simples, no los detallaremos. Pasemos pues a analizar los datos de las tablas.

Los resultados obtenidos para los ajustes a través de las dos técnicas (con y sin la consideración de los pesos estadísticos de los puntos linealizados), así como para los ajustes no lineales, serán presentados a continuación. En las tablas 1 y 2, la primera línea muestra la variable independiente, la segunda línea presenta los valores de la función ajustada y la tercera línea da la incertidumbre de esos valores.

4.1. *Ajustes lineales sin la consideración de los pesos estadísticos.*

Los resultados de los ajustes lineales a los datos anteriores fueron presentados en la referencia [8]. Para el circuito RC, en el cual $i = ae^{bt}$, el ajuste de la recta a los puntos $(t_i, ln(i_i))$ produjo el resultado:

$$\begin{gathered} a = (50.40 \pm 0.33)\mu A, \\ b = (-0.00967 \pm 0.00011)s^{-1} \quad y \\ cov(b, ln(a)) = -6.1 \times 10^{-7}. \end{gathered} \tag{20}$$

Con esos resultados, se puede escribir la Tabla 3 que da las informaciones generales sobre el ajuste.

Para un péndulo simple, en el cual $L(T) = aT^b$, se obtuvo:

$$\begin{gathered} a = (25.31 \pm 0.15)cm/s^2, \\ b = (2.011 \pm 0,013)s^{-1} \quad y \\ cov(b, ln(a)) = -5.0 \times 10^{-5}. \end{gathered} \tag{21}$$

Estos parámetros llevan a los resultados para el ajuste mostrados en la Tabla 4.

Como cada conjunto de datos tiene apenas 10 puntos, y admitiendo que la flutuación de los puntos en torno de la función ajustada pueda ser considerada como una gaussiana, los valores obtenidos para $\sigma_{Y(X)m}$ a través de las Ecs. (8) y (9) pueden ser multiplicados por el factor 2.31, de forma que los intervalos tengan 95% de confianza.

TABLA 3

CIRCUITO RC (AJUSTE CON LINEALIZACIÓN SIN CONSIDERAR LOS PESOS ESTADÍSTICOS)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$t(s)$	10.0	20.0	30.0	40.0	50.0	60.0	70.0	80.0	90.0	100.0
$i(\mu A)$	45.75	41.53	37.70	34.23	31.07	28.21	25.60	23.24	21.10	19.15
$\sigma_{i(t)m}(\mu A)$	0.26	0.20	0.15	0.12	0.10	0.09	0.09	0.09	0.10	0.11

TABLA 4

PÉNDULO SIMPLE (AJUSTE CON LINEALIZACIÓN SIN CONSIDERAR LOS PESOS ESTADÍSTICOS)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$T(s)$	0.637	0.880	1.082	1.250	1.407	1.534	1.667	1.773	1.894	1.971
$L(T)(cm)$	10.22	19.57	29.66	39.64	50.29	59.84	70.72	80.06	91.42	99.05
$\sigma_{L(T)m}(cm)$	0.11	0.14	0.16	0.18	0.23	0.29	0.38	0.47	0.59	0.67

TABLA 5

CIRCUITO RC (AJUSTE CON LINEALIZACIÓN CONSIDERANDO LOS PESOS ESTADÍSTICOS)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$t(s)$	10.0	20.0	30.0	40.0	50.0	60.0	70.0	80.0	90.0	100.0
$i(t)(\mu A)$	45.73	41.52	37.70	34.22	31.08	28.22	25.62	23.26	21.12	19.18
$\sigma_{i(t)m}(\mu A)$	0.19	0.14	0.11	0.09	0.09	0.10	0.11	0.12	0.12	0.13

TABLA 6

PÉNDULO SIMPLE (AJUSTE CON LINEALIZACIÓN CONSIDERANDO LOS PESOS ESTADÍSTICOS)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$T(s)$	0.637	0.880	1.082	1.250	1.407	1.534	1.667	1.773	1.894	1.971
$L(T)(cm)$	10.29	19.66	29.73	39.69	50.30	59.80	70.63	79.91	91.20	98.78
$\sigma_{L(T)m}(cm)$	0.22	0.29	0.31	0.30	0.28	0.26	0.25	0.29	0.37	0.45

Con los resultados obtenidos para los ajustes podríamos extraer varias informaciones de interés en un curso inicial de Física Experimental. En el circuito RC tenemos, por ejemplo, condiciones de determinar la constante de tiempo ($\tau = -1/b$), además de tener una información inmediata sobre el valor de la corriente eléctrica en el instante en que el circuito fue cerrado (parámetro a). Con los resultados para el péndulo simple podríamos determinar la aceleracion de la gravedad en el lugar del experimento, ya que $a = g/(4\pi^2)$, y podríamos todavía extraer una preciosa información sobre la presencia de errores sistemáticos, comparando el valor de b con el valor 2. Por otro lado, la incertidumbre de este parámetro nos permitiría hacer una evaluación de la precisión experimental. Sin embargo, el objetivo de este artículo es simplemente discutir un refinamiento en la técnica de linealización presentada en la referencia [8], buscando determinar la precisión de los parámetros ajustados así como el intervalo de incertidumbre relativa a la función ajustada. Ese refinamiento se describió en §3; pasemos pues a mostrar los resultados obtenidos.

4.2. *Ajustes lineales con la consideración de los pesos estadísticos.*

Presentaremos a continuación los resultados de los ajustes de las rectas a los puntos linealizados del tipo $(x_i; y_i \pm \sigma_{ymi})$, siendo que los σ_{ymi} fueron obtenidos a través de la Ec. (19). Esto requiere un preajuste con el uso de las Ecs. (1) y (2) para que $\sigma_{Y(X)}$ pueda ser determinado por la Ec. (16). La aplicación de las Ecs. (10)—(15) nos da los siguientes resultados para la función ajustada:

TABLA 7

AJUSTE NO LINEAL DE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL PARA LOS DATOS DE LA TABLA 1

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$t(s)$	10.0	20.0	30.0	40.0	50.0	60.0	70.0	80.0	90.0	100.0
$i(t)(\mu A)$	45.73	41.52	37.69	34.22	31.07	28.21	25.62	23.26	21.12	19.17
$\sigma_{i(t)m}(\mu A)$	0.19	0.14	0.11	0.09	0.09	0.10	0.10	0.11	0.12	0.13

TABLA 8

AJUSTE NO LINEAL DE LA FUNCIÓN POTENCIA PARA LOS DATOS DE LA TABLA 2

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$T(s)$	0.637	0.880	1.082	1.250	1.407	1.534	1.667	1.773	1.894	1.971
$L(T)(cm)$	10.29	19.65	29.73	39.69	50.29	59.79	70.62	79.90	91.19	98.76
$\sigma_{L(T)m}(cm)$	0.22	0.29	0.31	0.31	0.28	0.26	0.25	0.29	0.37	0.45

$$\begin{aligned} a &= (50.36 \pm 0.25)\mu A, \\ b &= (-0.00966 \pm 0.00010)s^{-1} \quad y \\ cov(b, ln(a)) &= -4.28 \times 10^{-7}. \end{aligned} \tag{22}$$

con $\sigma_{Y(X)} = 0.274\mu A$.

Así, con $i = ae^{bt}$ y utilizando la Ec.(8), construimos la Tabla 5.

Para el péndulo simple, la aplicación de las Ecs. (10)—(15) nos da los siguientes resultados:

$$\begin{aligned} a &= (25.39 \pm 0.31)cm/s^2, \\ b &= (2.002 \pm 0,021)s^{-1} \quad y \\ cov(b, ln(a)) &= -2.47 \times 10^{-4}. \end{aligned} \tag{23}$$

con $\sigma_{Y(X)} = 0.693cm$.

Así, con $L = aT^b$ y utilizando la Ec. (9), construimos la Tabla 6.

4.3. *Ajustes no lineales.*

Nos limitaremos a presentar los resultados para los ajustes de las funciones exponencial y potencia a los datos de las tablas 1 y 2, respectivamente. Esos ajustes fueron realizados en dos paquetes computacionales distintos: “Origin” y “LAB Fit”[2]. Ambos presentaron los mismos resultados, dados a continuación.

Para el ajuste no lineal de la función exponencial, encontramos:

$$\begin{aligned} a &= (50.36 \pm 0.25)\mu A, \\ b &= (-0.00966 \pm 0.00010)s^{-1} \quad y \\ cov(b, a) &= -2.112 \times 10^{-5}. \end{aligned} \tag{24}$$

con $\sigma_{Y(X)} = 0.271\mu A$.

Con esos resultados se construye la Tabla 7.

En el caso del péndulo, el ajuste no lineal de la función potencia para los datos nos da:

$$\begin{aligned} a &= (25.39 \pm 0.31)cm/s^2, \\ b &= (2.002 \pm 0,021)s^{-1} \quad y \\ cov(b, a) &= -6.326 \times 10^{-3}. \end{aligned} \tag{25}$$

con $\sigma_{Y(X)} = 0.694cm$.

Así, referente al ajuste, construimos la Tabla 8.

Con los datos obtenidos en las tablas 5 y 6 (equivalentes a los de las tablas 7 y 8), podríamos trazar los gráficos de las funciones ajustadas, como se hizo en [8], involucrando tres líneas: una central, obtenida a través de $Y(X)$ y dos líneas más definiendo un intervalo de confianza, obtenidas a través de $\sigma_{Y(X)m}$.

5. CONCLUSIONES

Como algunos textos mencionan y varios paquetes computacionales (inclusive los de calculadoras) utilizan la técnica de linealización de las funciones potencia y exponencial, sin la consideración de pesos estadísticos cuando los puntos experimentales son del tipo $(X;Y)$, es necesario que lectores y usuarios tomen conocimiento de las limitaciones de esta técnica que es bastante usual. Más que eso, es necesario también saber cómo superar esas limitaciones, que es lo que discutimos aquí, y cuyos resultados analizaremos a continuación.

Al comparar, a través de simples inspecciones, los ajustes sin la consideración de los pesos estadísticos de los puntos linealizados con los ajustes no lineales correspondientes, percibimos que realmente la concordancia entre los resultados no es muy buena. Una inspección en los resultados (20) y (24) y aun en (21) y (25) muestra que, aunque haya una “cierta compatibilidad” entre los valores medios de los parámetros obtenidos por las técnicas lineal (sin la consideración de los pesos estadísticos) y no lineal, los valores de las incertidumbres de estos parámetros son significativamente diferentes. Por otro lado, la consideración de las incertidumbres de los puntos

[2] www.extensao.hpg.com.br

linealizados, discutida en este artículo y obtenidas por propagación de errores, produce ajustes lineales en completo acuerdo con los correspondientes ajustes no lineales. Una inspección en los resultados (22) y (24) y aun en (23) y (25) nos permite afirmar que, en terminos prácticos, los ajustes son idénticos.

Hay que resaltar que el resultado final del ajuste para cada función puede ser representado a través de un gráfico que involucra tres líneas. La línea central, referente a la función ajustada $Y(X)$, y dos líneas delimitando un intervalo de incertidumbre $\sigma_{Y(X)m}$ en torno de la función, lo que da una indicación visual del intervalo de confianza de esa función ajustada. Dicho intervalo se calcula a través de la tercera línea de cada tabla de resultados y, comparando los $\sigma_{Y(X)m}$ dados en las tablas 3 y 7 y también aquellos dados en las tablas 4 y 8, percibimos un completo desacuerdo entre los resultados. Una comparación entre los $\sigma_{Y(X)m}$ dados en las tablas 5 y 7 y también entre aquellos dados en las tablas 6 y 8 permite afirmar que las precisiones de las funciones ajustadas definen los mismos intervalos de incertidumbre.

Así, en el ajuste de las funciones potencia y exponencial para datos del tipo (X, Y), la técnica de linealización con la consideración de los pesos estadísticos (generados a partir de las fluctuaciones de los puntos experimentales, y obtenidos por propagación de errores), propuesta en este artículo, no produce distorsiones apreciables en los resultados obtenidos y pueda ser considerada equivalente a la técnica no lineal. Naturalmente, el estudio desarrollado aquí limita esa afirmación a los ajustes en que el cálculo del error propagado pueda ser hecho dentro de una aproximación de primer orden.

REFERENCIAS

[1] Hennies, Curt E. et al., Problemas Experimentais em Física, Vol. 1, Editora da Unicamp, Campinas, 2a Edição, (1988) pág. 190

[2] Silva, Wilton P. et al, Tratamento de Dados Experimentais, UFPB/Editora Universitária , João Pessoa, 2a Edição (1998) , pág. 141, 155, 161, 157

[3] Vuolo, José H., Fundamentos da Teoria de Erros, Editora Edgard Blücher, São Paulo, 1 a Edição, (1992) pág. 158, 161

[4] Button, Conrad - Kurv+ for Windows, USA (1992-1996) - Conrad Button's Software, 20230 Lake Riley Rd. Arlington, WA, 98223

[5] CRVPLOT V 6.24, USA (1990-1997) - Simply Software, 5572 Kingsburg Rd. Fairfield, OH, 45014

[6] Cox, Thomas S. - Curvefit V 2.10-0, USA (1987)

[7] La mayoría de las calculadoras con interfaz gráfica.

[8] Silva, Wilton P. et al., Rev. Bras. Ensino de Física, 21, 341, (1999)

[9] Bechhoefer, John, Am. J. Phys. 68, 424, (2000)

[10] Bevington, P. R. and Robinson, D. K., Data Reduction and Error Analysis for Physical Sciences, McGraw-Hill, New York, 2nd ed., (1992) pág. 134.

[11] Taylor, J. R., An Introduction to Error Analysis, 2nd Edition, University Science Books, Sausalito, California (1997), pág. 194,195,196