

## COLAPSO GRAVITACIONAL DE UN CAMPO ESCALAR EN UN ESPACIO AUTO-SIMILAR

M.J. Lucano<sup>1</sup>, J.A.C. Nogales<sup>2</sup>

*Universidad Mayor de San Andrés, Carrera de Física  
Campus Universitario, Calle 27, Cota-Cota  
La Paz-Bolivia*

### RESUMEN

En el presente trabajo se presentan soluciones analíticas de la ecuación de Einstein mínimamente acoplada a un campo escalar sin masa  $\phi$ . Estas soluciones son utilizadas para la construcción de modelos de colapso del campo escalar. Para ello, se realiza un corte a lo largo de una hipersuperficie tipo tiempo, lo que da lugar a la aparición de un Horizonte Aparente HA y luego se unen estos espacios con un espacio-tiempo de Minkowski. Como resultado, cuando el espacio presenta auto-similaridad continua de la primera clase (homotética), la formación de los agujeros negros se inicia con masa infinitesimal (colapso Tipo II), y la misma se escala en la forma  $M \propto P^\gamma$ , siendo  $\gamma$  un exponente crítico y  $P$  un parámetro que representa la “intensidad” de las condiciones iniciales. Un análisis de los parámetros físicos, muestra que los modelos presentan las mismas generalidades, a saber, la masa se escala como  $M \propto P^{1/2}$  y el campo escalar toma la forma  $\phi(t) \sim \ln(1 + Pt) + \phi_0$ . Asimismo, un análisis de los puntos singulares muestra que en modelos existe una singularidad en  $t = -\frac{1}{P}$  que se encuentra detrás del Horizonte Aparente por lo que todos representan el colapso del campo escalar.

### 1. INTRODUCCIÓN

El colapso gravitacional de una concentración localizada de materia es uno de los temas centrales de la Relatividad General desde sus inicios.

El colapso gravitacional tiene generalmente, cuatro tipos de posibles estados finales. El primero es la detección del proceso para la formación de objetos estelares auto-sustentados, tales como estrellas, enanas blancas o estrellas de neutrones. El segundo es simplemente la dispersión del objeto colapsado que finalmente deja un espacio-tiempo plano. El tercer tipo es la formación de agujeros negros con materia y radiación saliente, mientras que el cuarto es la formación de singularidades desnudas. Para el último caso, sin embargo, la Hipótesis de la Censura Cósmica establece que las singularidades desnudas no ocurren en la naturaleza [22]. El estudio del colapso gravitacional ha sido guiado principalmente por estas cuatro posibilidades.

En años recientes se ha hecho evidente que existe una fenomenología intrigante en el umbral de la formación de un agujero negro producto del colapso, y más recientemente, este problema ha atraído la atención, debido al descubrimiento por parte de M. Choptuik (1993), que trabajó con el campo escalar sin masa  $\phi$ , de fenómenos “críticos” que hasta ahora eran desconocidos [5].

Usando un método numérico muy sofisticado, Choptuik encontró que, dejando la distribución inicial del campo escalar parametrizado suavemente por un parámetro  $P$  que caracteriza la intensidad de la

interacción gravitacional de las condiciones iniciales, el colapso del campo escalar con los datos iniciales  $P > P_*$  (solución supercrítica) forma un agujero negro, mientras que el conjunto con  $P < P_*$  (solución subcrítica) no. Así surgían las siguientes características: (a) las soluciones cuasi-críticas ( $P \sim P_*$ ) se aproximan a un atractor llamado “solución crítica”, el cual es *universal* en el sentido de que todas las familias de soluciones consideradas que dependen de un parámetro, se aproximan a un espacio-tiempo idéntico, (b) la solución crítica es periódica en una escala logarítmica en el espacio-tiempo, con un período de  $\Delta \sim 3.44$ ; esto es referido usualmente como un “eco” o auto-similaridad discreta (DSS), (c) cerca de la solución crítica (pero con  $P > P_*$ ), la masa del agujero negro está dada por:

$$M_{BH} = K (P - P_*)^\gamma,$$

donde  $K$  es una constante que depende de la familia de datos iniciales y  $\gamma$  es un exponente crítico que toma el valor  $\gamma \sim 0.36$ . Invariancia de escala, universalidad de las soluciones y escalamiento a alguna potencia sugiere un fenómenos críticos.

El fenómeno descubierto por Choptuik, fue rápidamente encontrado en modelos analíticos en el colapso de ondas gravitacionales aximétricas [1], en el fluido de radiación y en otros modelos de materia [7]. Por tanto, la aparición de este tipo de fenómeno no se debe a una elección particular del tipo de materia, sino más bien, es una característica genérica de la Relatividad General. Evidencia numérica adicional para sustentar esta conclusión puede ser encontrada en [9] y [20].

<sup>1</sup> Email: mlucano@cbpf.br

<sup>2</sup> Email: jnogales@fiumsa.edu.bo

Los estudios analíticos, han demostrado la universalidad de la solución crítica y su auto-similaridad (continua CSS ó discreta DSS) en la mayoría de los casos, sin embargo, se ha encontrado que  $\gamma$  depende fuertemente del tipo de materia considerado y el tipo de auto-similaridad que presenta el espacio-tiempo.

Sería muy útil el entender la universalidad de este fenomeno analíticamente. Una aproximación es el tratar de encontrar una solución exacta que describa el colapso gravitacional y observar el comportamiento crítico a través del cálculo de la masa del agujero negro. Claro esta que, debido a la complejidad matemática de la ecuación de campo de Einstein, frecuentemente se deben imponer algunas simetrías en los sistemas considerados (una simetría impuesta usualmente es que el espacio sea esféricamente simétrico) con el propósito de hacer el problema tratable.

Es justamente esto lo que se hará en este trabajo, se presentarán tres clases de soluciones exactas de la ecuación de Einstein mínimamente acoplado con el campo escalar sin masa  $\phi$  (el mismo que utilizó Choptuik), y luego se estudiarán sus propiedades físicas a través de un modelamiento del espacio-tiempo para observar el escalamiento de la masa del agujero negro con respecto a un parámetro  $P$ . Para derivar estas soluciones, se asumirá que los espacios son esféricamente simétricos y continuamente auto-similares (CSS).

Los modelos presentados por ser auto-similares, no son asintóticamente planos y la masa del agujero negro crece indefinidamente. Para resolver este problema, se hará una “cirugía” en el espacio-tiempo, usando el formalismo de W. Israel [19]. Se cortará el espacio-tiempo a lo largo de una hipersuperficie y luego se la unirá a un espacio plano, así el espacio-tiempo resultante será asintóticamente plano y tendrá una masa finita. Estos modelos, producto del proceso de “cortar y pegar” [23], son más realistas y comparables al de Choptuik pero con diferente auto-similaridad.

Para la obtención de los modelos, se ha organizado el presente estudio de la siguiente manera. La Sección 2 se avoca a una explicación del fenómeno descubierto por Choptuik, justificando la elección del modelo de materia y el tipo de auto-similaridad. La Sección 3 introduce los parámetros de análisis y los casos de estudio. La Sección 4 presenta los modelos encontrados a través de la imposición de condiciones físicas y geométricas, los cuales presentan el escalamiento de la masa y el correspondiente análisis. Finalmente este estudio termina en la Sección 5 donde las conclusiones principales son presentadas.

## 2. AUTO-SIMILARIDAD EN EL COLAPSO GRAVITACIONAL

A un nivel heurístico, la existencia del fenómeno crítico en el sistema [24] y en otros modelos es un resultado directo de la *competición* en la dinámica del sistema. La naturaleza de esta competición puede ser entendida a través de la pregunta: dados los datos iniciales genéricos (entendiéndose como datos genéricos a aquellos que al

ser seleccionados, hacen que el sistema se comporte de manera regular) ¿Dónde acaba la energía del sistema en un tiempo posterior? En términos aproximados, la energía cinética del campo tiende a dispersar el mismo hasta el infinito, mientras que la energía potencial gravitacional (enteramente auto-inducida), si es suficientemente dominante durante el colapso, capturará alguna cantidad de masa-energía del sistema. El hecho clave, es que la competición dinámica puede ser controlada a través del ajuste de un parámetro en las condiciones iniciales.

### 2.1. Auto-similaridad Discreta y Continua

Los sistemas que exhiben auto-similaridad aparecen idénticos en diferentes escalas temporales y/o espaciales, y generalmente surgen en situaciones físicas en las cuales no existen escalas de longitud naturales. En el caso de la Relatividad General, la auto-similaridad puede ser discreta (DSS) o continua (CSS), y ambos tipos han sido observados en el colapso gravitacional. Por ejemplo, la solución crítica encontrada por Choptuik para el campo escalar  $\phi$  esféricamente simétrico es periódico en escala o discretamente auto-similar (DSS), mientras que otras soluciones críticas, por ejemplo, para un fluido perfecto esférico, son invariantes de escala, o continuamente auto-similares (CSS) [4].

Una auto-similaridad continua (CSS) en el espacio-tiempo en el contexto de la Relatividad General corresponde a la existencia de un campo de vectores homotéticos  $\xi$ , definidos por la propiedad [3]:

$$L_{\xi}g_{\mu\nu} = 2g_{\mu\nu}, \quad (1)$$

la cual conforma, de acuerdo a la dimensión y a las simetrías del espacio, un sistema de ecuaciones diferenciales parciales. Por otra parte, un espacio-tiempo es discretamente auto-similar (DSS) si existe un difeomorfismo  $\Phi$  y una constante real  $\Delta$  tal que:

$$\Phi^*g_{\mu\nu} = e^{2\Delta}g_{\mu\nu}, \quad (2)$$

donde  $\Phi^*g_{ab}$  es el inverso (*pull-back*) de  $g_{ab}$  bajo el difeomorfismo  $\Phi$  [12].

En el presente estudio se trabajará con la auto-similaridad continua (1), ya que para obtener resultados analíticos con una auto-similaridad discreta, el trabajo debe ser numérico [20] como en el caso de Choptuik, y en nuestro caso lo que se busca, más bien, son soluciones exactas de la ecuación de Einstein.

### 2.2. Clasificación Según la Auto-Similaridad y el Tipo de Masa

Existen dos tipos de comportamiento con respecto a la masa del agujero negro que se forma en el colapso, lo que depende del conjunto inicial de datos. En uno de estos, la formación del agujero negro comienza con una masa infinitesimal que además, presenta el fenómeno de escalamiento, dominada por una solución crítica tipo DSS. En el otro tipo, la formación del agujero negro

comienza con una masa finita, y la solución es estática y asintóticamente plana. Choptuik, Chmaj y Bizon [6], nombraron los dos tipos de comportamiento crítico como Tipo I y Tipo II respectivamente, que corresponden a las transiciones de fase de segundo y primer orden.

Una vez que Choptuik descubrió el fenómeno de escalamiento de la masa, resultados similares fueron encontrados para una variedad de campos de materia. En algunos de estos, nuevos fenómenos cualitativos fueron descubiertos [8]. Cada aspecto del escenario básico: CSS y DSS, universalidad y escalamiento se aplica directamente a la solución crítica en una simetría esférica, sin embargo, como consecuencia de otros estudios (perturbaciones no esféricas en el fluido perfecto y en el campo escalar [3], y en el vacío aximétrico [1]), surgen dos preguntas relacionadas: ¿son los ya conocidos fenómenos críticos en la simetría esférica destruidos por pequeñas desviaciones de ésta? y, ¿existen fenómenos críticos en el colapso gravitacional lejos de la simetría esférica?, estas preguntas aún no han sido completamente contestadas.

### 3. PARÁMETROS Y CONDICIONES DE ANÁLISIS

A continuación se presentarán los parámetros físicos y matemáticos para el análisis de las soluciones de la ecuación de Einstein y las condiciones físicas y geométricas que nos ayudaran a discernir entre aquellos modelos que son aceptables de aquellos que no. Se utilizarán técnicas estándares [23] para estudiar el punto crítico para la formación de un agujero negro o de una singularidad. Asimismo, se impondrán ciertas restricciones sobre la dependencia funcional de las soluciones con respecto a la coordenada espacial y temporal, que reducirán el número de casos de estudio y permitirán la resolución de las ecuaciones diferenciales planteadas de forma directa.

#### 3.1. Parámetros de Análisis

Un espacio-tiempo simétricamente esférico, es descrito por la métrica [14]:

$$ds^2 = -N^2(r, t)dt^2 + U(r, t)dr^2 + V(r, t)d\Omega^2. \quad (3)$$

El Horizonte aparente y función de masa se los introduce como sigue: Poisson e Israel [19] elaboraron una generalización para la *Funcion de Masa* que, en ausencia de carga eléctrica, toma la forma:

$$1 - \frac{2m(t, r)}{r_{ph}} = g^{\mu\nu} r_{ph, \mu} r_{ph, \nu}. \quad (4)$$

La definición anterior generaliza el horizonte de eventos en la métrica de Schwarzschild y permite otras generalizaciones; por ejemplo, sobre el horizonte aparente (HA) debe cumplirse:

$$1 - \frac{2m(t, r)}{r_{phA}} = 0, \quad (5)$$

o equivalentemente:

$$g^{\mu\nu} r_{phA, \mu} r_{phA, \nu} = 0, \quad (6)$$

la relación (5) define también el radio físico del Horizonte Aparente  $r_{HA}$  que es nuestro segundo parámetro de análisis. La masa encerrada dentro del Horizonte Aparente está dada por:

$$M_{HA} = \frac{1}{2} r_{phA}. \quad (7)$$

Se usa el invariante de Kretschmann  $K \equiv R^{\alpha\beta\gamma\delta} R_{\alpha\beta\gamma\delta}$  y el escalar curvatura para el análisis de los puntos singulares de los modelos ya que permite la identificación de singularidades reales en el espacio-tiempo.

#### 3.2. Condiciones Geométricas

La ecuación de campo de Einstein para un campo escalar sin masa  $\phi$  puede ser escrita como [15]:

$$R_{\mu\nu} = 8\pi\phi_{, \mu} \phi_{, \nu}. \quad (8)$$

Las ecuaciones de Einstein imponen condiciones geométricas sobre el campo escalar, la primera condición geométrica es la condición de simetría. Si el espacio-tiempo tiene simetría esférica, la dependencia funcional de un campo escalar isotrópico deberá darse sólo en términos de las coordenadas  $t$  y  $r$ , es decir:

$$\phi = \phi(t, r), \quad (9)$$

por tanto, la condición de simetría esférica, a partir de la ecuación (8) se traduce en:

$$R_{22} = 0, \quad (10)$$

$$R_{33} = 0. \quad (11)$$

Al analizar las otras componentes del tensor de Ricci aparece la segunda condición geométrica o condición de integración del campo escalar,

$$R_{00}R_{11} - R_{01}^2 = 0. \quad (12)$$

La ecuación (12) es la condición de integración del campo escalar que se utilizará para encontrar las soluciones que satisfagan la ecuación de Einstein. Sin embargo, la resolución de ésta es bastante compleja, pues se constituye en una ecuación diferencial no lineal de cuarto orden, de una o más funciones dependientes de dos variables, por lo que se estudiarán casos especiales que permitirán su resolución de manera directa como se explica más adelante.

El fenómeno de escalamiento de la masa  $M_{BH} \sim (P - P_*)^\gamma$  del agujero negro que se forma del colapso de un campo de materia, se produce en los espacios que presentan auto-similaridad ya sea discreta o continua; para el presente estudio, además de las dos condiciones geométricas anteriores, se estudiará el caso en el que las soluciones cumplan la condición de ser continuamente auto-similares (ec. (1)).

Debido a la simetría esférica, podemos escribir los vectores de Killing  $\xi^\mu$  como:

$$\xi^\mu = \xi^0 \delta_t^\mu + \xi^1 \delta_r^\mu, \quad (13)$$

cuando se desarrolla la condición (1) para que pueda ser aplicada a una métrica general con simetría esférica, se obtienen tres ecuaciones:

$$\begin{aligned}\nabla_0 \xi^0 &= 1, \\ g_{00} \nabla_1 \xi^0 + g_{11} \nabla_0 \xi^1 &= 0, \\ \nabla_1 \xi^1 &= 1.\end{aligned}\quad (14)$$

El sistema de ecuaciones diferenciales (14) deben tener una solución no trivial para que se verifique que nuestro espacio-tiempo sea continuamente auto-similar, es decir, debe ser posible encontrar vectores de Killing  $\xi^0$  y  $\xi^1$  tal que satisfagan este sistema.

### 3.3. Condiciones Físicas

Para lograr el objetivo de la construcción de un modelo físico completo para el colapso gravitacional, es necesario, en algunos casos, limitar la presencia de materia a una región del espacio-tiempo. Un método para lograr esto es 'cortar' el espacio a lo largo de una hipersuperficie tipo tiempo  $r = r_0(t)$ , y luego 'pegar' la región  $r \leq r_0(t)$  con otro tipo de espacio en  $r \geq r_0(t)$ .

De la función de masa (4) se observa que, por ser esta una función de  $r$  y  $t$ , en principio, no está localizada, y dependiendo de la forma funcional que tome puede extenderse hasta el infinito, por ello en nuestro caso se harán decaer las soluciones de la ecuación de Einstein, cualquiera sea su forma, a una métrica de Minkowski (espacio plano) a partir del ajuste de uno o más parámetros que provengan de la solución misma, es decir:

$$ds^2 \rightarrow ds_M^2, \quad (15)$$

en nuestro caso se unirá el espacio-tiempo en  $r \leq r_0(t)$  con el espacio-tiempo de Minkowski en  $r \geq r_0(t)$ , para luego pasar a estudiar los parámetros físicos y el colapso en sí.

Para observar el escalamiento de la masa se debe garantizar también la existencia de un horizonte aparente, es decir, la existencia de una hipersuperficie tipo tiempo  $r = r(t)$  tal que, encerrada dentro de ésta se encuentre la masa del agujero negro y al ser combinada con la función de masa (4), para un valor fijo de  $r = r_0$  (cortamos el espacio en  $r_0$ ), se obtiene una masa que dependa no solo de  $r_0$  sino también de un parámetro que identifique la intensidad de las condiciones iniciales<sup>3</sup> (por ejemplo  $P$ ):

$$M = M_{BH}(r_0, P). \quad (16)$$

De la relación (7) y tomando en cuenta la métrica (3) se infiere, para que exista un Horizonte Aparente en el caso dinámico, que  $V$  debe ser necesariamente función de  $r$  y  $t$ :

$$V = V(r, t), \quad (17)$$

<sup>3</sup>El proceso en sí consiste en eliminar la variable  $t$  utilizando  $r(t)$  y  $m(t, r)$ , fijando el valor de  $r$  a  $r_0$ , es decir, intersectar ambas funciones en el tiempo y limitar así la presencia de materia, lo que se hace evidente al construir el diagrama de Penrose correspondiente al modelo.

las funciones  $N$  y  $U$  de la métrica, dependiendo de los casos de estudio, pueden ser funciones de  $r$ , funciones de  $t$ , de ambas variables o ser constantes, pero  $V(r, t)$  debe ser necesariamente función de  $r$  y  $t$ . Para las diferentes combinaciones existen dieciseis soluciones [15].

### 3.4. Soluciones

Ya que las condiciones geométricas están dadas en términos de las componentes del tensor de Ricci, se calculan estas directamente [15].

Debe tomarse en cuenta que de las cinco componentes del tensor de Ricci que son distintas de cero, sólo cuatro son independientes ya que:

$$R_{22} = \sin^{-2}\theta R_{33} = 0 \quad (18)$$

es por ello que ni la condición de integración ni la de simetría toman en cuenta la componente  $R_{33}$ . Para simplificar la notación, abreviaremos la condición de integración del campo escalar (12) con el símbolo:

$$\Sigma \equiv R_{00}R_{11} - R_{01}^2 = 0. \quad (19)$$

Las primeras condiciones que deben cumplir las funciones  $N$ ,  $U$  y  $V$  de la métrica (3) son las geométricas, para luego pasar a examinarlas y verificar que cumplen con las condiciones físicas, ya que de antemano no se conoce su forma funcional. Esto implica que para poder encontrar las soluciones primero debe resolverse el sistema de ecuaciones (8) y (14). Como se observa, resolver este sistema de manera general resulta complicado, por lo que se imponen ciertas restricciones sobre la dependencia de  $N$ ,  $U$  y  $V$  con respecto a la coordenada radial  $r$  y la coordenada temporal  $t$ .

Con respecto al campo escalar, este puede depender sólo de  $t$ , ó de  $r$  y  $t$  simultáneamente, ya que el caso en el que  $\phi$  depende sólo de  $r$  no representa ningún tipo de colapso (el campo no evoluciona en el tiempo). El considerar el caso en el que  $\phi$  depende de ambas variables es equivalente a considerar los dieciseis casos de estudio, volviendo al problema de resolver en forma general (8) y (14), razón por lo que se estudiará el caso en el que  $\phi$  depende de  $t$ :

$$\phi = \phi(t). \quad (20)$$

El imponer a  $\phi$  como función de  $t$ , implica que también debe cumplirse:

$$R_{01} = 0, \quad (21)$$

como consecuencia de la ecuación (12).

Con respecto a la función  $R(r)$  se la propondrá como  $R(r) = r^2$  por la siguiente razón. Analizando la métrica general con simetría esférica (3), se observa que la componente que acompaña a  $d\Omega^2$  es igual a  $r^2$ ; ya que en nuestro caso requerimos que esta componente sea función de  $r$  y  $t$ , una opción razonable, que generaliza esta métrica, es elegir la función  $V$  como  $V(t, r) = r^2 f(t)$ .

Al hacer un análisis más detallado de las diferentes combinaciones se obtienen dos casos de estudio, con las respectivas componentes de Ricci calculadas y la condición de integración [15].

Este procedimiento de utilizar las componentes de Ricci, en lugar de la ecuación de Einstein directamente, es válido y equivalente, ya que en nuestro caso se resuelve la ecuación de Einstein en el sentido "inverso". En el caso de resolver la ecuación de Einstein directamente, se supone la forma de la materia; en nuestro caso, más bien se recurre a la ecuación de Einstein para encontrar la forma de la materia, es decir, del campo y la métrica. A través de las condiciones geométricas y físicas impuestas a las soluciones se 'modela' la geometría del espacio-tiempo, tal que se forma un Horizonte Aparente y encerrado dentro de este se encuentra la materia, entonces, al cumplir las diferentes condiciones, el campo escalar finalmente cumple la solución y la métrica así determinada, satisface la ecuación de Einstein directamente porque no se tiene que hacer ninguna imposición sobre el campo.

#### 4. MODELOS

##### 4.1. Primer Modelo

Este modelo corresponde al caso en el cual:

$$N_{(r,t)} = 1, \quad (22)$$

$$U_{(r,t)} = f(t), \quad (23)$$

$$V_{(r,t)} = r^2 f(t). \quad (24)$$

Se debe encontrar una solución que satisfaga el sistema de ecuaciones diferenciales  $R_{22} = 0$ ,  $\Sigma = 0$  estas, después de ser simplificadas pueden escribirse como:

$$R_{22} = \frac{d^2 f}{dt^2} + \frac{1}{2} \frac{1}{f} \left( \frac{df}{dt} \right)^2 = 0, \quad (25)$$

$$\Sigma = \frac{1}{4} \frac{1}{f^2} \left( \frac{df}{dt} \right)^4 - \left( \frac{d^2 f}{dt^2} \right)^2 = 0, \quad (26)$$

la ecuación (26), puede ser escrita como:

$$\frac{d^2 f}{dt^2} \mp \frac{1}{2f} \left( \frac{df}{dt} \right)^2 = 0, \quad (27)$$

comparando (27) y (25) vemos que el sistema de ecuaciones diferenciales tendrá una solución si elegimos el signo + en la ecuación (27), con lo que se obtiene una sola ecuación diferencial:

$$2f \frac{d^2 f}{dt^2} + \left( \frac{df}{dt} \right)^2 = 0. \quad (28)$$

Al resolver (28) se obtiene:

$$f(t) = (C_1 t + C_2)^{2/3}, \quad (29)$$

con lo que la métrica (3) toma la forma:

$$ds^2 = -dt^2 + (C_1 t + C_2)^{2/3} dr^2 + (C_1 t + C_2)^{2/3} r^2 d\Omega^2, \quad (30)$$

la métrica (30) decae a la métrica de Minkowski:

$$ds_M^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\Omega^2,$$

si los parámetros  $C_1$  y  $C_2$  se ajustan como  $C_1 = 0$  y  $C_2 = 1$ . En lo que concierne a este modelo, se mantendrá la constante  $C_2$  igual a uno, lo que no afecta a ninguno de los cálculos posteriores.

La función de masa está dada por:

$$1 - \frac{2m_{(r,t)}}{R} = R_{,\alpha} R_{,\beta} g^{\alpha\beta} = R_{,0}^2 g^{00} + R_{,1}^2 g^{11}, \quad (31)$$

entonces la función de masa resultante es:

$$m_{(r,t)} = \frac{C_1^2 r^3}{18(C_1 t + 1)}, \quad (32)$$

y el Horizonte Aparente se obtiene haciendo  $R_{,\alpha} R_{,\beta} g^{\alpha\beta} = 0$ , lo que resulta en:

$$r_{HA} = \frac{3}{C_1} (C_1 t + 1)^{2/3}. \quad (33)$$

Al hacer el corte en un radio finito  $r_0$ , la masa encerrada dentro del Horizonte Aparente es:

$$M_{BH} = \frac{(3r_0)^{3/2}}{18} C_1^{1/2},$$

si hacemos  $C_1 = P$  es decir, identificamos  $C_1$  con la intensidad de las condiciones iniciales, obtenemos:

$$M_{BH} = \frac{(3r_0)^{3/2}}{18} P^{1/2}. \quad (34)$$

Escribimos nuevamente la métrica como:

$$ds^2 = -dt^2 + (1 + Pt)^{2/3} dr^2 + (1 + Pt)^{2/3} r^2 d\Omega^2, \quad (35)$$

y dejamos que los demás parámetros físicos estén en función del parámetro  $P$ .

Utilizando (8) calculamos la forma del campo escalar, que en nuestro caso, debido a que las componentes del tensor de Ricci son nulas excepto  $R_{00}$ , es:

$$\phi_{,t}^2 = \frac{1}{8\pi} R_{00}, \quad (36)$$

$$\phi_{,t}^2 = \frac{1}{12\pi} \frac{P^2}{(1 + Pt)^2}, \quad (37)$$

integrando (37) obtenemos:

$$\phi_{(r,t)} = \pm \sqrt{\frac{1}{12\pi}} \ln(1 + Pt) + g(r), \quad (38)$$

sin embargo, si imponemos la condición:

$$\phi_{(t=0,r)} = \phi' \quad (39)$$

es decir la existencia de un campo escalar al inicio del colapso, no localizado, se obtiene:

$$\phi(t) = \pm \sqrt{\frac{1}{12\pi}} \ln(1 + Pt) + \phi_0. \quad (40)$$

Para encontrar los vectores de Killing, hacemos la proposición  $\xi^1 = Ar + B$ , donde los valores de  $A$  y  $B$

deben obtenerse de las ecuaciones diferenciales e introduciendola en el sistema de ecuaciones diferenciales (14), obtenemos:

$$\xi^0 = \frac{1 + Pt}{P} \quad (41)$$

$$\xi^1 = \frac{2}{3}r. \quad (42)$$

El invariante de Kretschmann y el escalar curvatura son, respectivamente:

$$K = \frac{20}{27} \frac{P^4}{(1 + Pt)^4} \quad (43)$$

$$R = -\frac{2}{3} \frac{P^2}{(1 + Pt)^2}. \quad (44)$$

De estos invariantes se observa que existe un punto singular en  $t = -\frac{1}{P}$ . El diagrama de Penrose de este espacio-tiempo se muestra en la Figura 1.

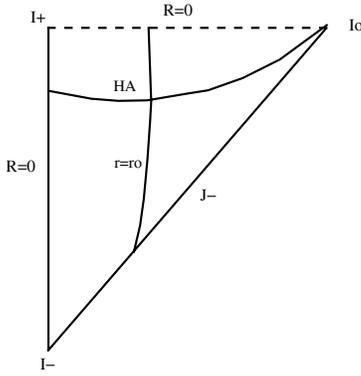


Figura 1. Diagrama de Penrose que muestra el horizonte aparente (HA) y la singularidad (en línea cortada) para el Primer Modelo.

#### 4.2. Segundo Modelo

Este modelo corresponde al caso en el cual:

$$N_{(r,t)} = f(t), \quad (45)$$

$$U_{(r,t)} = f(t), \quad (46)$$

$$V_{(r,t)} = r^2 f(t), \quad (47)$$

las condiciones de simetría y de integración son respectivamente:

$$R_{22} = \frac{1}{2f} \left( \frac{df}{dt} \right)^2 - \frac{d^2 f}{dt^2} = 0, \quad (48)$$

$$\Sigma = \left( \frac{d^2 f}{dt^2} \right)^2 - \frac{1}{4f^2} \left( \frac{df}{dt} \right)^4 = 0, \quad (49)$$

expresamos (49) en la forma:

$$\frac{1}{2f} \left( \frac{df}{dt} \right)^2 \mp \frac{d^2 f}{dt^2} = 0, \quad (50)$$

comparando (48) y (50) vemos que el sistema de ecuaciones diferenciales tendrá una solución si elegimos el signo  $-$  en la ecuación (50), con lo que se obtiene una sola ecuación diferencial:

$$2f \frac{d^2 f}{dt^2} - \left( \frac{df}{dt} \right)^2 = 0, \quad (51)$$

(en este caso el signo elegido es el opuesto a aquel de la ecuación (27)).

Al resolver (51), se obtiene:

$$f_{(t)} = (C_1 t + C_2)^2, \quad (52)$$

con lo que la métrica toma la forma:

$$ds^2 = -(C_1 t + C_2)^4 dt^2 + (C_1 t + C_2)^2 dr^2 + (C_1 t + C_2)^2 r^2 d\Omega^2 \quad (53)$$

nuevamente, la métrica (53) decae a la métrica de Minkowski si  $C_1 = 0$  y  $C_2 = 1$  y mantenemos  $C_2 = 1$ , como en la anterior métrica.

Realizando un cálculo similar al primer modelo se obtiene la función de masa:

$$m_{(t,r)} = \frac{C_1^2 r^3}{2(C_1 t + 1)^3}, \quad (54)$$

y el Horizonte Aparente:

$$r_{HA} = \frac{(C_1 t + 1)^2}{C_1}. \quad (55)$$

La masa encerrada dentro del Horizonte Aparente es:

$$M_{BH} = \left( \frac{r_0}{2^{2/3}} \right)^{3/2} C_1^{1/2},$$

nuevamente identificamos  $C_1 = P$  con la intensidad de las condiciones iniciales, así:

$$M_{BH} = \left( \frac{r_0}{2^{2/3}} \right)^{3/2} P^{1/2}. \quad (56)$$

Expresando la métrica en función del parámetro  $P$ :

$$ds^2 = -(1 + Pt)^4 dt^2 + (1 + Pt)^2 dr^2 + (1 + Pt)^2 r^2 d\Omega^2. \quad (57)$$

Utilizando (36) e imponiendo la condición (39), se obtiene el campo escalar:

$$\phi_{(t)} = \pm \sqrt{\frac{1}{4\pi}} \ln(1 + Pt) + \phi_0. \quad (58)$$

Proponiendo nuevamente  $\xi^1 = Ar + B$ , para los vectores de Killing se obtiene la solución:

$$\xi^0 = \frac{1}{3} \frac{(1 + Pt)}{P}, \quad (59)$$

$$\xi^1 = \frac{2}{3}r. \quad (60)$$

El invariante de Kretchmann y el escalar curvatura para este espacio son, respectivamente:

$$K = \frac{60P^4}{(1+Pt)^{12}} \quad (61)$$

$$R = -\frac{6P^2}{(1+Pt)^6}. \quad (62)$$

de los que se observa que existe un punto singular en  $t = -\frac{1}{P}$ . El diagrama de Penrose de este espacio-tiempo se muestra en la Figura 2.

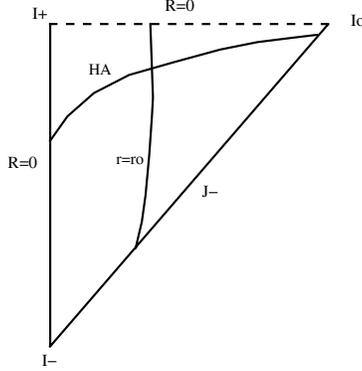


Figura 2. Diagrama de Penrose que muestra el horizonte aparente (HA) y la singularidad (en línea cortada) para el Segundo Modelo.

### 4.3. Tercer Modelo

Tomando como ejemplo los modelos anteriores, se pudo encontrar un tercer modelo. Sin embargo, en este se “propusieron” funciones  $N$ ,  $U$  y  $V$  y se utilizó el método de prueba y error, para verificar que estas cumplieren con las condiciones geométricas y físicas.

Se propusieron las siguientes funciones:

$$N_{(r,t)} = f(t), \quad (63)$$

$$U_{(r,t)} = \frac{1}{1+Pt}, \quad (64)$$

$$V_{(r,t)} = \frac{r^2}{1+Pt}, \quad (65)$$

las condiciones de simetría y de integración son, respectivamente:

$$R_{22} = \frac{1}{2} \frac{r^2 P}{f(t)^3 (1+Pt)^2} \left( \frac{df}{dt} \right) + \frac{5}{4} \frac{r^2 P^2}{f(t)^2 (1+Pt)^3} = 0 \quad (66)$$

$$\Sigma = \frac{15}{4} \frac{P^2}{(1+Pt)^2} + \frac{1}{f^2} \left( \frac{df}{dt} \right)^2 + \frac{4P}{f(1+Pt)} \left( \frac{df}{dt} \right) = 0, \quad (67)$$

combinando (66) y (69), se obtiene la ecuación diferencial:

$$\frac{5P}{(1+Pt)} + \frac{2}{f} \left( \frac{df}{dt} \right) = 0, \quad (68)$$

que se integra facilmente:

$$f(t) = \frac{C}{(1+Pt)^{5/2}}, \quad (69)$$

así, la métrica de este espacio-tiempo toma la forma:

$$ds^2 = -\frac{C^2}{(1+Pt)^5} dt^2 + \frac{dr^2}{(1+Pt)} + \frac{r^2}{(1+Pt)} d\Omega^2, \quad (70)$$

esta métrica decae a la de Minkowski cuando  $C = 1$  y  $P = 0$ . Nuevamente se mantendrá el valor de  $C$  igual a 1. El invariante de Kretchmann y el escalar curvatura son, respectivamente:

$$K = \frac{15P^4}{4} (1+Pt)^6, \quad (71)$$

$$R = -\frac{3P^2}{2} (1+Pt)^3. \quad (72)$$

Debe notarse que, al analizar los invariantes, se observa la aparición de ninguna singularidad en  $t \rightarrow \infty$ . Para analizar adecuadamente las cantidades físicas hacemos el siguiente cambio de variable:

$$f(t)dt = dT, \quad (73)$$

donde la función  $f(t)$  está dada por (69). Al integrar (73) se obtiene:

$$(1+Pt) = \left( \frac{2}{3} \right)^{2/3} (1+PT)^{-2/3}, \quad (74)$$

ahora, expresando la métrica y los parámetros físicos en función de esta nueva variable temporal se obtiene la métrica:

$$ds^2 = -dT^2 + (1+PT)^{2/3} dr^2 + (1+PT)^{2/3} r^2 d\Omega^2, \quad (75)$$

la función de masa:

$$m_{(r,t)} = \frac{r^3 P^2}{6(1+PT)}, \quad (76)$$

el Horizonte Aparente:

$$r_{HA} = \frac{2}{P} \left( \frac{3}{2} \right)^{2/3} \frac{1}{(1+PT)}, \quad (77)$$

la masa del agujero negro:

$$M_{BH} = \left( \frac{r_0}{2} \right)^{3/2} P^{1/2}, \quad (78)$$

el campo escalar:

$$\phi(t) = \pm \sqrt{\frac{1}{4\pi}} \ln(1+PT) + \phi_0, \quad (79)$$

los vectores de Killing:

$$\xi^0 = -\frac{2}{3P} \left( \frac{2}{3} \right)^{2/3} (1+PT)^{-2/3}, \quad (80)$$

$$\xi^1 = \frac{2}{3}r, \quad (81)$$

el invariante de Kretchmann, el escalar curvatura:

$$K = \frac{15P^4}{4} \left(\frac{2}{3}\right)^4 (1 + PT)^{-4}, \quad (82)$$

$$R = -\frac{2P^2}{3} (1 + PT)^{-2}, \quad (83)$$

que denota la existencia de una singularidad en  $T = -\frac{1}{P}$  y por último el diagrama de Penrose de este espacio-tiempo (Figura 3).

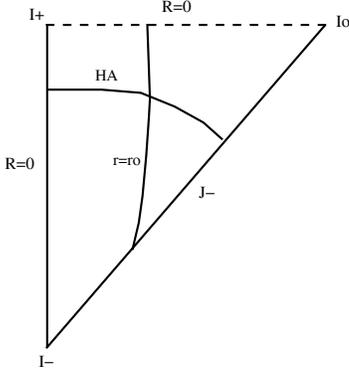


Figura 3. Diagrama de Penrose que muestra el horizonte aparente (HA) y la singularidad (en línea cortada) para el tercer modelo (una vez efectuado el cambio de variable).

#### 4.4. Análisis de los Modelos

En esta sección se presentaron tres modelos aparentemente distintos, que representan el colapso gravitacional de un campo escalar sin masa  $\phi$ . En todos se observó, producto del modelamiento del espacio-tiempo, que la masa del agujero negro resultado del proceso de colapso, toma la ley de potencia  $M \propto P^{1/2}$ .

Como en el modelo de Choptuik, el análisis de los modelos debe contemplar la aparición de un parámetro (valor crítico)  $P_*$ , tal que, comparado con el parámetro  $P$  y dependiendo de los valores que tome  $P_*$ , se forme o no el agujero negro. Este valor crítico, evidente de la relación de escalamiento de la masa, es cero  $P_* = 0$ , por lo que existen tres casos de análisis.

- Si  $P = 0$  (solución crítica), la masa del agujero negro se hace cero, el campo escalar se hace constante, la métrica decae a la de Minkowski y el Horizonte Aparente tiende a infinito, lo que denota que no existe ningún tipo de colapso.
- Si  $P > 0$  (solución supercrítica), todos los parámetros matemáticos y físicos existen y se forma un agujero negro.
- Si  $P < 0$  (solución subcrítica), la solución y los parámetros matemáticos y físicos son los inversos que en el caso  $P > 0$ . Así, estos representan la formación de agujeros blancos.

En el anterior análisis no se hace mención a ninguno de los tres modelos, ya que este es válido para los tres.

Un análisis global de los parámetros físicos obtenidos, muestra que la universalidad de las variables físicas, predicha por Choptuik también se observa en nuestros modelos, ya que como se ve de las ecuaciones (40), (58) y (79), la forma funcional del campo escalar es la misma en los tres, resultado encontrado también en [11] y que, como consecuencia natural de que la métrica decae a la de Minkowski, el campo escalar se hace constante.

Asimismo, la universalidad del exponente crítico  $\gamma$ , predicha para un determinado tipo de materia, se observa en los tres modelos, ya que en todos los casos el exponente crítico toma el valor  $\gamma = 1/2$ .

Del escalamiento de la masa (ecuaciones (34), (56) y (78)) se observa, que todos los modelos presentan el colapso Tipo II, es decir, la formación de los agujeros negros comienza con una masa infinitesimal y que como resultado de resolver el sistema de ecuaciones (8) todos los modelos verifican la condición de ser auto-similares de la primera clase u homotéticos.

El análisis global es similar en los tres modelos. El invariante de Kretchmann  $K$  y el escalar curvatura  $R$  para los modelos, muestran la existencia de una singularidad en  $t = -\frac{1}{P}$ . La naturaleza de esta singularidad depende del valor del parámetro  $P$ . Cuando  $P > 0$  la singularidad se encuentra detrás del horizonte aparente, y la solución representa la formación del agujero negro. Los diagramas de Penrose correspondientes a estos modelos se muestran en las Figuras 1, 2 y 3.

Asimismo, como los tres modelos presentan las mismas generalidades, la métrica aparentemente son diferentes en los tres casos; en particular, la función  $f(t)$  en (29), (52) y (69) pueden ser transformados como en el caso de la ec.(73) adecuadamente y se puede mostrar que en realidad las tres soluciones son las mismas.

## 5. CONCLUSIONES

En el presente trabajo, se analizó la dicotomía entre la formación o no de un agujero negro y el escalamiento de la masa correspondiente a la primera posibilidad presentando tres soluciones analíticas no-estáticas de la ecuación de Einstein.

Para observar el escalamiento de la masa, la forma del campo escalar y la forma del espacio-tiempo, se modeló el espacio-tiempo, para lo que previamente se introdujeron los parámetros de análisis tanto físicos como matemáticos, así como las condiciones geométricas y físicas para hacer modelos físicamente realistas. El particular, se introdujo el concepto de horizonte aparente como una generalización del horizonte de eventos y la masa encerrada dentro del mismo; ya que estas masas resultaban infinitas, inviabilizando un análisis global del espacio-tiempo, se discutió la posibilidad de utilizar el método de cortar el espacio a lo largo de una hipersuperficie, formalismo ideado por W. Israel, tal que las masas resultantes del colapso, sean finitas.

Una vez presentados los parámetros y las condiciones

para el modelamiento del espacio-tiempo, se pasó a encontrar las soluciones de la ecuación de Einstein, no sin antes establecer ciertas restricciones sobre la dependencia funcional de los parámetros físicos con respecto a la variable temporal y espacial, esto con el propósito de resolver las ecuaciones diferenciales planteadas de forma directa. Una vez encontradas las soluciones (espacios con horizontes aparentes que evolucionan), se procedió a aplicar todas las condiciones para observar la forma del escalamiento de la masa de los agujeros negros y la forma del campo escalar.

Un hecho interesante, es que en todos los modelos se observan las mismas generalidades. El hecho de que el exponente crítico y la forma funcional del campo escalar sean los mismos, podría ser un indicio de la universalidad del exponente crítico para un dado modelo de materia, y la universalidad del espacio cuando se presenta el colapso crítico sin embargo como puede fácilmente demostrarse en realidad se trata del mismo espacio tiempo.

Cabe recalcar que el valor  $\gamma = 1/2$  ya ha sido encontrado en otros estudios [2] [23], sin embargo, el análisis para la obtención de las soluciones es distinto, por lo que representa una confirmación del valor del exponente crítico con este tipo de auto-similaridad.

También debe puntualizarse, que el hecho de que en nuestros modelos el exponente crítico sea distinto a aquel encontrado por Choptuik ( $\gamma \sim 0.36$ ) no representa una contradicción y más bien muestra que  $\gamma$  no depende sólo del tipo de materia, sino también del tipo de auto-similaridad del espacio, ya que en el modelo de Choptuik el espacio presenta DSS y en los nuestros CSS.

Claramente, las conclusiones demandan, una mayor cantidad de trabajo numérico y teórico, para establecer las generalidades en los fenómenos críticos del colapso gravitacional. En particular, los futuros estudios deben incluir modelos más generales, alejados de la simetría esférica con un momento angular y/o carga eléctrica. También quedan por considerar los efectos cuánticos en esta discusión, tarea que recién será emprendida en el contexto del colapso crítico.

El reto teórico fundamental es el de poder explicar porque tantos modelos de materia admiten una solución crítica, es decir, un atractor de codimensión uno en el umbral de la formación de un agujero negro. Si la existencia de una solución crítica es realmente una característica genérica, entonces, al menos, debe existir un argumento intuitivo, y tal vez una prueba matemática para este hecho importante.

#### REFERENCIAS

- [1] Abrahams, A.M. y Evans, C.R., 1993, Critical Behavior and Scaling in Vacuum Axisymmetric Gravitational Collapse, Phys. Rev. Lett. 70, 2980–2983.
- [2] Brady, P.R., Chambers, C.M., 1997, Phases of Massive Scalar Field Collapse, Phys. Rev. D56, 6057–6061, gr-qc/9709014.
- [3] Carmeli, M., 'Classical Fields', (John Wiley & Sons, Inc., 1982).
- [4] Carr, B.J., y Coley, A.A., 2000, Complete Classification of Spherically Symmetric Self-Similar Perfect Fluid Solutions, Phys. Rev. D62, 044023.
- [5] Choptuik, M.W., 1993, Universality and Scaling in Gravitational Collapse of a Massless Scalar Field, Phys. Rev. Lett. 70, 9.
- [6] Choptuik, M.W., Chmaj, T., Bizon, P., 1996, Critical Behavior in Gravitational Collapse of a Yang–Mills Field, Phys. Rev. Lett. 77, 424, gr-qc/9603051.
- [7] Evans, C.R. y Coleman, J.S., 1994, *Critical Phenomena and Self-Similarity in the Gravitational Collapse of Radiation Fluid*, Phys. Rev. Lett. 72, 1782.
- [8] Gundlach, C., 2000, Critical Phenomena in Gravitational Collapse, gr-qc/0001046.
- [9] Hirschmann, E.W. y Eardley, D.M., 1995, Universal Scaling and Echoing in Gravitational Collapse of a Complex Scalar Field, Phys. Rev. D51, 4198, gr-qc/9412066.
- [10] Horowitz, G.T., Teukolsky, S.A., 1998, 'Black Holes', gr-qc/9808035.
- [11] Husain, V., Martinez, E.A., Núñez, D., 1994, Exact Solution for Scalar Field Collapse, Phys. Rev. D50, 3783.
- [12] Joshi, P.S., 'Global Aspects in Gravitation and Cosmology' (Oxford University Press Inc., New York, 1993).
- [13] Kaku, M., 'Quantum Field Theory' (Oxford University Press, Inc., New York, 1993).
- [14] Landau, L.D., E.M. Lifshitz, 'Teoría Clásica de los Campos', (Ed. Reverté S.A., Barcelona, 1966).
- [15] Lucano, Marcelo J., Tesis presentada para la obtención del grado de Licenciado en Física, Universidad Mayor de San Andres, La Paz-Bolivia, (2001)
- [16] Luminet, J.P., 'Agujeros Negros' (Editorial Alianza, Madrid, 1991).
- [17] Misner, C.W., K.S. Thorne, J.A. Wheeler, 'Gravitation' (W.H. Freeman & Company, San Francisco, 1973).
- [18] Neilsen, D.W., y Choptuik, M.W., 1999, Critical Phenomena in Perfect Fluids, gr-qc/9812053.
- [19] Poisson, E. y Israel, W., Phys. Rev. D41 1796 (1990)
- [20] Rein, G., Randall, A.D., Schaeffer, J., 1998, Critical Collapse of Collisionless Matter—a numerical investigation, Phys. Rev. D58, 044007, gr-qc/9804040.
- [21] Shapiro, S.T., Teukolsky S.A., 'Black Holes, White Dwarfs, and Neutron Stars', (John Wiley & Sons, Inc., 1983)
- [22] Wald, R.M., 1997, Gravitational Collapse and Cosmic Censorship, gr-qc/9710068.
- [23] Wang, A., Oliveira, H.P., 1996, Critical Phenomena of Collapsing Massless Scalar Wave Packets, gr-qc/9608063.
- [24] Wang, A., 2001, Critical Phenomena in Gravitational Collapse: The Studies so Far, gr-qc/0104073.
- [25] Weinberg, S., 'Gravitation and Cosmology' (John Wiley & Sons, Inc., 1972)