

COLISIÓN DE DOS AGUJEROS NEGROS

V. Subieta y J.A.C. Nogales

Carrera de Física, U.M.S.A.

La Paz - Bolivia

RESUMEN

Se hace una aproximación semianalítica de la colisión frontal de dos agujeros negros, usando una solución exacta a las ecuaciones de campo de Einstein dada por Weyl. Esta solución puede ser interpretada como un espacio-tiempo estático, axisimétrico con dos agujeros negros más una singularidad cónica entre ellos. Se encontraron los pseudotensores energía-momento formulados por Tolman y Einstein para esta métrica que describe el sistema y se obtuvieron pseudotensores idénticos, de este resultado, por analogía con el electromagnetismo se dedujo el potencial del sistema, el cual coincide con el potencial de la expansión en la aproximación del campo débil. Con este potencial, las fórmulas de la teoría de radiación gravitatoria y eliminando adiabáticamente la singularidad cónica, la cual se hace depender del tiempo, se halló la tasa de emisión de energía y la cantidad total de energía emitida en ondas gravitatorias durante el proceso de colisión. Los resultados obtenidos mediante esta aproximación están muy de acuerdo a los obtenidos por cálculos numéricos en el contexto de la teoría de la perturbación y a los resultados obtenidos por Araujo y Oliveira en una aproximación semianalítica en la que determinan el potencial del sistema a partir de la fuerza de interacción entre los agujeros negros.

1. INTRODUCCIÓN

Un agujero negro no es un objeto ordinario definido por la cantidad y propiedades del material del cual está hecho, es un objeto del cual ninguna señal física puede escapar, esta totalmente incomunicado del resto del Universo. Como se trata de objetos muy particulares, quizá la colisión de estos parezca un hecho extraordinario, pero no esta lejos de la realidad. Puesto que en el Universo el ochenta por ciento de las estrellas forman sistemas binarios, se espera que agujeros negros de masas estelares, originados siguiendo la evolución estelar típica también formen sistemas binarios, donde los agujeros se hallan orbitando uno alrededor del otro y finalmente por la pérdida de energía en radiación gravitatoria lleguen a caer uno en el otro. De hecho los agujeros negros que han sido indirectamente observados porque se manifiestan por sí mismos emitiendo rayos X se hallan en sistemas binarios donde los objetos se encuentran muy próximos y existe una transferencia de masa [7]. En nuestra galaxia deben existir unas pocas docenas de tales sistemas. Sin embargo, es razonable sospechar que el número de agujeros negros de masas estelares es al menos de 10^7 . Esto basado en la estimación que sólo el uno o dos por ciento de las supernovas forman agujeros negros. Aún el número de agujeros sería mayor considerando los agujeros que quedaron como reliquias de la historia temprana de la galaxia [7].

Las colisiones de agujeros negros masivos también son probables. Se cree que la formación de galaxias ocurre a través de la fusión de unidades más pequeñas [8], si estas unidades tienen sus propios agujeros negros

masivos en el centro, entonces se producirían colisiones de agujeros negros masivos. (Para la detectabilidad y la razón de eventos esperados ver [4])

La importancia del estudio de la colisión de los agujeros negros es debido a que esta considerada como una de las más prometedoras e importantes fuentes astrofísicas detectables de radiación gravitatoria en nuestro universo. En estos años, varios observatorios de ondas gravitatorias (LIGO proyecto en Estados Unidos, VIRGO y GEO en Europa y TAMA en Japón [4] [5]) están siendo concluidos y tendrán la capacidad y sensibilidad suficiente para detectar las ondas gravitatorias provenientes de colisiones de agujeros negros. La información ganada de la detección de las ondas permitirá además de una reconstrucción de los parámetros astrofísicos del sistema, la primera directa e inequívoca evidencia de la existencia de estos objetos, además que a la vez servirá para corroborar la teoría de la relatividad general.

Debido a esta gran importancia ya se realizaron muchos trabajos tratando la colisión de agujeros negros. El problema dinámico de dos cuerpos es uno de los más complejos en relatividad general, no existen soluciones exactas a las ecuaciones de campo de Einstein describiendo la geometría del espacio-tiempo para estas configuraciones, es por esto que el problema ha sido tratado principalmente por métodos numéricos y por aproximaciones post-Newtonianas.

Araujo y Oliveira [1] hicieron una aproximación semianalítica de la colisión frontal de dos agujeros negros, usando una solución exacta a las ecuaciones de campo de Einstein dada por Weyl en 1917. Ésta solución puede

ser interpretada como un espacio-tiempo estático, axisimétrico con dos agujeros negros más una singularidad cónica entre ellos. De la singularidad cónica calcularon la fuerza de interacción entre los agujeros y obtuvieron el potencial del sistema.

En este trabajo se usa esta misma solución exacta de Weyl y se encuentran para ésta los pseudotensores energía-momento formulados por Einstein y Tolman (este último además es equivalente al pseudotensor formulado por Moller [6]) que resultan ser idénticos. De este resultado por analogía con el electromagnetismo se deduce el potencial del sistema el que además coincide con el potencial de la expansión en la aproximación del campo débil.

Con este potencial, las fórmulas de la teoría de radiación gravitatoria y eliminando adiabáticamente la singularidad cónica, haciendo depender la distancia entre los agujeros del tiempo, se halló la tasa de emisión de energía y la cantidad total de energía emitida en ondas gravitatorias durante el proceso de colisión.

En la sección 2 de este trabajo se presenta esta solución exacta de Weyl que describe a los dos agujeros negros con una singularidad cónica entre ellos. En la sección 3. se deduce el potencial del sistema a partir de los resultados de los pseudotensores energía-momento para esta solución de Weyl. En la sección 4 se determina la energía radiada durante el proceso de colisión usando la fórmula de luminosidad obtenida de la teoría de la radiación gravitatoria y el potencial que se había deducido y finalmente en la sección 5 se discuten los resultados.

2. LA MÉTRICA DE WEYL

A pesar de la dificultad de las ecuaciones de campo de Einstein, porque son no lineales, el año 1917 Weyl publicó una de las primeras soluciones exactas. Esta solución es un caso particular de la clase de espacio-tiempo estático y axisimétrico, conocido hoy en día como la clase de Weyl.

El elemento de línea de un espacio-tiempo estático y axisimétrico, en coordenadas cilíndricas esta dado por:

$$ds^2 = e^{2\Psi} dt^2 - e^{-2\Psi} [e^{2\nu} (d\rho^2 + dz^2) + \rho^2 d\phi^2], \quad (1)$$

donde $\Psi = \Psi(\rho, z)$, $\nu = \nu(\rho, z)$, $0 < \rho < \infty$, $-\infty < z < \infty$ y $0 < \phi < 2\pi$. Las ecuaciones de campo de Einstein obtenidas para esta métrica son:

$$\nabla^2 \Psi \equiv \Psi_{\rho\rho} + \frac{\Psi_\rho}{\rho} + \Psi_{zz} = 0, \quad (2)$$

$$\nu_\rho = \rho(\Psi_\rho^2 - \Psi_z^2), \quad (3)$$

$$\nu_z = 2\rho\Psi_\rho\Psi_z. \quad (4)$$

Se puede demostrar que hay una solución particular para estas ecuaciones de campo isométrica a la solución de Schwarzschild que describe un agujero negro. Esto significa que para una solución particular de Weyl, haciendo una transformación de coordenadas la métrica de Weyl decae en la métrica de Schwarzschild. Es decir

que la solución de un agujero negro esta incluida en las soluciones de Weyl.

Se puede verificar directamente que una solución a la ecuación de Laplace (2) es el potencial Newtoniano para una barra finita de longitud L localizada en el eje z y centrada en el origen:

$$\Psi = \frac{M}{L} \ln \left[\frac{R_+ + R_- - L}{R_+ + R_- + L} \right], \quad (5)$$

donde

$$R_\pm = \sqrt{\rho^2 + (z \mp \frac{L}{2})^2} \quad (6)$$

y M es la masa de la barra Newtoniana, expresada en unidades de longitud. La solución correspondiente a (3) y (4) usando la ecuación (5) es:

$$\nu = 2 \left(\frac{M}{L} \right)^2 \ln \left[\frac{(R_+ + R_-)^2 - L^2}{4R_+R_-} \right]. \quad (7)$$

Haciendo $L = 2M$ y desarrollando la transformación de coordenadas cilíndricas a esféricas:

$$\rho^2 = (r^2 - Lr) \operatorname{sen}^2 \theta, \quad (8)$$

$$z = \left(r - \frac{L}{2} \right) \cos \theta, \quad (9)$$

el elemento de línea decae en el elemento de línea de Schwarzschild:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2. \quad (10)$$

Nótese que en coordenadas cilíndricas el horizonte de eventos esta dado por $\rho = 0$, $-M \leq z \leq M$.

Como la ecuación de Laplace (2) es lineal, uno puede superponer soluciones, cada una de ellas correspondiente al potencial de una barra Newtoniana, una vez que se hace esto se pueden resolver las ecuaciones (3) y (4) para obtener lo que puede interpretarse como *una solución de dos agujeros negros*.

Veamos como se hace esto: Se designan las masas de las dos barras Newtonianas como M y M' de longitudes $2M$ y $2M'$, además las barras están situadas sobre el eje z y centradas en $Z_0 + M$ y $-Z_0 - M'$ respectivamente.

La solución a la ecuación (2) para esta configuración esta dada por:

$$\Psi = \frac{1}{2} \ln \left[\frac{R_+ + R_- - 2M}{R_+ + R_- + 2M} \right] + \frac{1}{2} \ln \left[\frac{R'_+ + R'_- - 2M'}{R'_+ + R'_- + 2M'} \right], \quad (11)$$

donde

$$R_\pm = \sqrt{\rho^2 + [z - (Z_0 + M) \mp M]^2}, \quad (12)$$

$$R'_\pm = \sqrt{\rho^2 + [z + (Z_0 + M') \mp M']^2}. \quad (13)$$

La solución de la función $\nu(\rho, z)$ correspondiente a esta solución Ψ esta dada por:

$$\nu = \nu[\Psi] + \nu[\Psi'] + 2\sigma[\Psi, \Psi'], \quad (14)$$

donde Ψ , $\nu[\Psi]$ y Ψ' , $\nu[\Psi']$ son soluciones al problema de un solo agujero y el término de interacción σ esta dado por [1]:

$$\begin{aligned} \sigma[\Psi, \Psi'] = & \\ & \frac{1}{2} \ln \left[\frac{(M' + Z_0) R_+ + (M + M' + Z_0) R_- - M R'_-}{Z_0 R_+ + (M + Z_0) R_- - M R'_+} \right] \\ & + \frac{1}{2} \ln \left[\frac{Z_0}{Z_0 + M'} \right]. \end{aligned} \quad (15)$$

Con esta solución se describe el espacio-tiempo debido a un sistema de dos agujeros negros en un eje de simetría, entonces surge la pregunta ¿por qué los dos cuerpos están estáticos, sin interactuar aparentemente entre ellos?. Otra solución exacta a la clase de Weyl, la solución de Curzon ya había causado controversia por la misma razón en 1924, incluso algunos físicos de la época señalaron que la teoría de la Relatividad General era incorrecta. Pero Einstein y Rozen resolvieron la paradoja mostrando que la solución de Curzon no tiene un vacío entre los dos cuerpos porque hay un deficit de ángulo cuando uno da una vuelta alrededor del eje de simetría en un plano perpendicular a la línea que une los dos cuerpos. Así en la Relatividad General, un sistema de dos cuerpos en equilibrio estático debe tener una clase de riostra entre ellos que los mantiene separados.

Para esta solución particular de Weyl ocurre que cuando $\rho = 0$ el término de interacción no desaparece entre las dos barras siendo éste:

$$\nu(0, z) = 2\sigma(0, z) = \ln \left[1 - \frac{MM'}{(Z_0 + M)(Z_0 + M')} \right] \quad (16)$$

para $|z| < Z_0$. Este término genera una singularidad cónica [1] la cual puede ser interpretada como una cuerda cósmica que mantiene los dos cuerpos apartados.

3. DETERMINACIÓN DEL POTENCIAL DEL SISTEMA

El potencial se deduce del resultado del pseudotensor energía-momento en la prescripción de Tolman (la formulación del pseudotensor de Tolman es además equivalente a la formulación del pseudotensor de Moller [6]) y de Einstein

El pseudotensor de Einstein esta definido como

$$\Theta_b^a = h_b^{ac}, \quad (17)$$

donde

$$h_b^{ac} = -h_b^{ca} = \frac{g_{bi}}{16\pi\sqrt{-g}} [(-g)(g^{ai}g^{cj} - g^{ci}g^{aj})]_{,j} \quad (18)$$

y el pseudotensor de Tolman esta definido como

$$T_k^i = \frac{1}{8\pi} U_{k,j}^{ij}, \quad (19)$$

donde

$$U_k^{ij} = \sqrt{-g} \left[-g^{li} \left(-\Gamma_{kl}^j + \frac{1}{2} g_k^j \Gamma_{al}^a + \frac{1}{2} g_l^j \Gamma_{ak}^a \right) \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} g_k^i g^{lm} \left(-\Gamma_{lm}^j + \frac{1}{2} g_l^j \Gamma_{am}^a + \frac{1}{2} g_m^j \Gamma_{al}^a \right) \right]. \quad (20)$$

Se obtuvieron resultados idénticos de estos dos pseudotensores para la métrica de Weyl. La componente $T_0^0 = \theta_0^0$ está dada por:

$$T_0^0 = -\frac{1}{8\pi} (2\Psi_\rho - \nu_\rho - \rho\nu_{\rho\rho} + 2\rho\Psi_{\rho\rho} - \rho\nu_{zz} + 2\rho\Psi_{zz}), \quad (21)$$

la cual puede ser simplificada con las ecuaciones de campo de Einstein (2), (3) y (4) y resulta finalmente:

$$T_0^0 = \frac{\rho}{4\pi} \Psi_z^2. \quad (22)$$

Es de interés la componente T_0^0 pues es la que da el valor de la energía gravitatoria por unidad de volumen y tiempo, las otras componentes corresponden a la densidad de momento.

El potencial del sistema estudiado puede ser determinado de este último resultado que describe el flujo de energía del sistema y de los principios de la física general. Existen muchas analogías entre la teoría electromagnética y la teoría de la relatividad general, ambas teorías tienen soluciones radiativas por ejemplo, y en muchos casos se usan estas similitudes para analizar y derivar propiedades en la relatividad general. En electromagnetismo y generalmente, en las teorías clásicas de campos, el flujo de energía es proporcional al cuadrado del gradiente del potencial, aplicando esta regla a la ecuación de flujo de energía (22) obtenida, se podría concluir que el potencial del sistema es la función Ψ . La aproximación a campos gravitatorios débiles confirma esta asunción.

4. DETERMINACIÓN DE LA ENERGÍA RADIADA

De la fórmula de luminosidad deducida en la teoría de radiación gravitatoria [3]:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{5} \langle \dot{h}_{ij} \dot{h}^{ij} \rangle, \quad (23)$$

vemos que necesitamos los tensores de inercia. Como la colisión es frontal, asumimos que el movimiento es completamente a lo largo del eje x. Escogemos el centro de masa en reposo en $x = 0$ x_1 y x_2 serán las posiciones de cada uno de los agujeros y M y M' sus respectivas masas. Se hacen las siguientes definiciones:

$$x \equiv x_1 - x_2, \quad \mu \equiv \frac{MM'}{m}, \quad m \equiv M + M'. \quad (24)$$

Se tiene entonces que la energía radiada queda reducida a:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{8}{15} \mu^2 (3\dot{x}\ddot{x} + x\dot{x}^2)^2, \quad (25)$$

donde los puntos denotan derivadas temporales.

Por otra parte la energía potencial definida por la función Ψ desde el centro de masas queda reducida a:

$$\Psi = \frac{1}{2} \ln \left[\frac{Z_0^2}{(Z_0 + 2M)(Z_0 + 2M')} \right]. \quad (26)$$

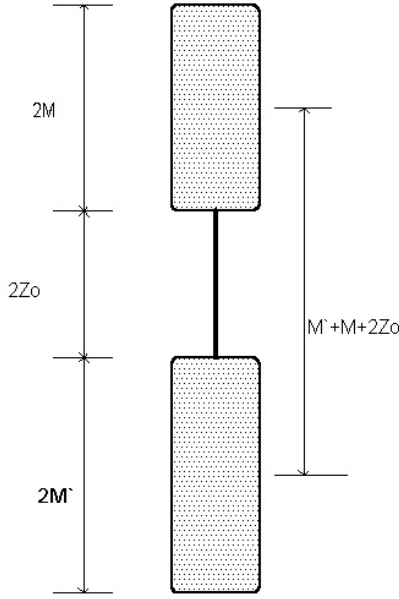


Figura 1. Relación de la distancia de separación de los horizontes de eventos de los dos agujeros y la distancia entre los centros de masas de los dos agujeros negros.

La distancia $2Z_0$ es la distancia de separación entre los horizontes de eventos de los dos agujeros, pero consideramos la distancia de separación entre los dos centros de masas de los agujeros negros a la cual ya llamamos antes x , la relación entre estas dos variables está dada por la ecuación (ver figura 1):

$$x = 2Z_0 + M + M'. \quad (27)$$

Ahora se hace un reescalamiento del espacio-tiempo a una forma apropiada, haciendo $M + M' = 1$, de esta forma la masa reducida es $\mu = MM'$, o en términos del factor de proporcionalidad entre las dos masas a ($a = M/M'$),

$$\mu = \frac{a}{(a+1)^2}. \quad (28)$$

Nótese que para cualquier valor que tome a , μ estará siempre entre los límites de 0 y $1/4$.

Con este reescalamiento y en función de x la energía potencial es:

$$\Psi = \frac{1}{2} \ln \left[\frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 2x - 3 + 16\mu} \right]. \quad (29)$$

Entonces la conservación de la energía estará dada por la siguiente ecuación:

$$\frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{1}{2} \ln \left[\frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 2x - 3 + 16\mu} \right] = \epsilon \quad (30)$$

(donde ϵ es la energía total del sistema).

Con la ayuda de esta última ecuación de movimiento calculamos \dot{x} , \ddot{x} y $\dot{\ddot{x}}$ con estas cantidades en la ecuación

(25) y considerando que se tiene interés en el proceso de colisión (esto significa lo que ocurre cuando x decrece con el tiempo), se calculará la variación de la energía no con el tiempo sino con la distancia de separación de los dos agujeros x , haciendo uso de la siguiente igualdad:

$$\frac{dE}{dx} = \frac{dE}{dt} \frac{1}{\dot{x}}. \quad (31)$$

Al hacer esta distancia entre los agujeros dependiente del tiempo, eliminamos adiabáticamente la singularidad cónica.

Finalmente se tiene que la tasa de la energía radiada en el proceso de colisión es

$$\frac{dE}{dx} = \frac{32}{15} \mu^2 \sqrt{2\epsilon - \ln \left(\frac{(x-1)^2}{x^2 + 2x - 3 + 16\mu} \right)} \times \frac{(x^4 + 2x^3 - 16x^2 + 22x - 9 + \alpha\mu + \beta\mu^2)^2}{(x-1)^4 (x^2 + 2x - 3 + 16\mu)^4}, \quad (32)$$

$$\alpha = 56x^2 - 176x + 120, \quad \beta = 256x - 384.$$

Nótese que $\frac{dE}{dx}$ diverge cuando $x \rightarrow 1$, esto ocurre cuando los horizontes de eventos de los dos agujeros negros se tocan. Pero cerca de este límite, el usar el potencial hallado sobre la base de la métrica de Weyl, deja de ser válido. Ocurre que cuando los dos agujeros negros se encuentran muy cerca el uno del otro, sufren grandes distorsiones en sus horizontes de eventos y la métrica de Weyl ya no describirá el sistema correctamente.

La tasa de energía radiada depende de la masa reducida μ que indica la proporción de las masas de los agujeros negros y la energía total del sistema que es determinada a partir de la separación inicial x_{max} de los agujeros negros cuando estos se encontraban en reposo, a partir de la ecuación

$$\epsilon = \frac{1}{2} \ln \left[\frac{x_{max}^2 - 2x_{max} + 1}{x_{max}^2 + 2x_{max} - 3 + 16\mu} \right]. \quad (33)$$

La cantidad total de energía radiada en ondas gravitatorias estará dada por

$$\Delta E_{(x_{max}, x_{min})} = \int_{x_{min}}^{x_{max}} \frac{dE}{dx} dx. \quad (34)$$

Aquí x_{max} es la distancia entre los agujeros desde la cual se inicia la colisión. Como ya dijimos antes la aproximación que realizamos para describir la colisión pierde sentido cuando los agujeros están muy cerca. Entonces se debe escoger x_{min} adecuadamente. Lo que usualmente se hace es escoger la distancia a la que los agujeros han alcanzado la velocidad de la luz x_{luz} cuando se encontraban inicialmente en reposo en el infinito. En este caso este punto está determinado por la solución a la siguiente ecuación trascendental:

$$\frac{x_{luz}^2 + 2x_{luz} - 3 + 16\mu}{x_{luz}^2 - 2x_{luz} + 1} = e. \quad (35)$$

TABLA 1

Cantidad total de energía gravitatoria radiada como una función de x_{max} , para dos valores distintos de μ (cuando las masas son iguales $\mu = 1/4$ y cuando una de las masas es aproximadamente 6 veces mayor $\mu = 1/6$). El valor de x_{min} usado es indicado entre corchetes. Los valores son comparados a los resultados obtenidos en la aproximación newtoniana, los resultados numéricos obtenidos por NCSA [2] y a los obtenidos por Araujo [1] en una aproximación semianalítica.

x	$\mu = \frac{1}{4} \Delta E [4.083]$	$\mu = \frac{1}{256} \Delta E [3.869]$	$\Delta E_{New} [2]$	$\Delta E_{NCSA} [2]$	$\Delta E_{AraOl} [2.1640]$
∞	0.00816	0.01198	0.01905	0.00894	0.00909
100	0.00792	0.01164	0.01878	0.00874	0.00895
30	0.00733	0.01082	0.01765	0.00831	0.00860
20	0.00687	0.01021	0.01610	0.00801	0.00833
10	0.00524	0.00821	0.01463	0.00715	0.00746
7	0.00359	0.00629	0.01244	0.00654	0.00662
5	0.00126	0.00502	0.00649	0.00582	0.00535

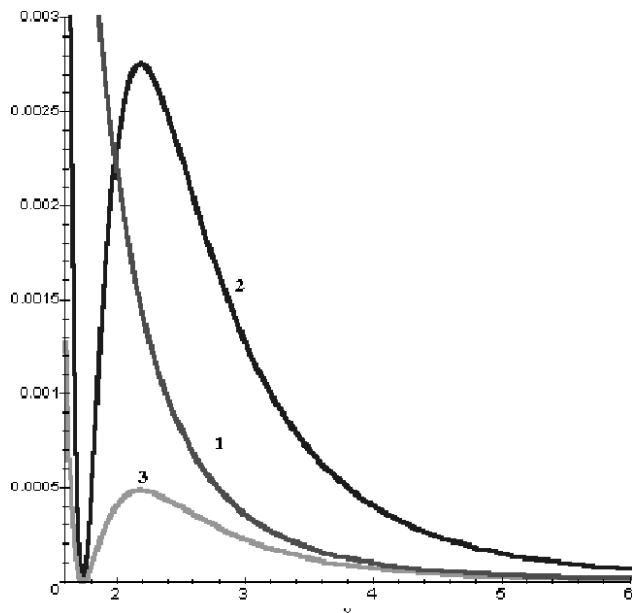


Figura 2. Comparación de la tasa de emisión de energía en forma de ondas gravitatorias para $\mu = 1/8$ y $x_{max} = \infty$ la obtenida en la aproximación Newtoniana (línea 1); la obtenida por Araujo y Oliveira [1] en una aproximación relativista en la que se determina el potencial a partir de la fuerza de interacción entre los dos agujeros (línea 3) y la obtenida en este trabajo con el potencial determinado a partir de la métrica de Weyl (línea 2).

Nótese que este punto nuevamente depende de μ es decir de la proporción entre las masas de los dos agujeros negros y toma el valor máximo $x_{luz} = 4.083$ cuando los agujeros tiene masas iguales o $\mu = \frac{1}{4}$ y tiene como valor límite $x_{luz} = 3.04$ cuando μ tiende a cero, esto es cuando uno de los agujeros es mucho más grande que el otro.

En la Tabla 1 se presentan resultados de energías totales obtenidas para distintas posiciones iniciales y para dos valores de μ muy diferentes, $\mu = 1/4$ cuando los

dos agujeros tienen masas iguales y $\mu = 1/256$ cuando uno de los agujeros tiene aproximadamente 256 veces la masa del otro. En esta tabla también se expresan los resultados obtenidos mediante otros métodos.

5. CONCLUSIONES

- Los pseudotensores de Einstein y Tolman (por tanto también de Moller [6]) para la métrica de Weyl que describe el sistema de los dos agujeros negros y la singularidad cónica entre ellos resultan ser iguales.
- Del resultado de los pseudotensores energía-momento se identificó la energía potencial del sistema: la función $\Psi(\rho, z)$.
- Este potencial depende de la proporción entre las masas, determinada por μ (ecuación 29) pero si la diferencia entre las masas es muy grande, esta dependencia se desvanece.
- El comportamiento de la tasa de energía radiada obtenida usando este potencial es similar al obtenido en la aproximación de la colisión de agujeros negros realizada por Araujo y Oliveira ¹ [1], pero es muy diferente del obtenido mediante una aproximación newtoniana (ver figura 2). Se tiene que la tasa de la energía presenta un pico máximo de radiación y diverge para $x = 1$ lo mismo ocurre en el caso de Araujo y Oliveira, en la aproximación newtoniana se tiene que la tasa de energía crece indefinidamente cuando la separación entre los dos agujeros decrece y esta diverge para $x = 0$. La tasa de energía radiada en el caso considerado es mayor a la de Araujo y Oliveira, porque en el potencial escogido se considera la energía potencial de todo el sistema, es decir, además de la fuerza de interacción esta incluida la

¹Araujo y Oliveira realizaron también una aproximación relativista en la que calculan la energía potencial del sistema a partir de la fuerza de interacción entre los dos agujeros negros, calculada también a partir de la métrica de Weyl.

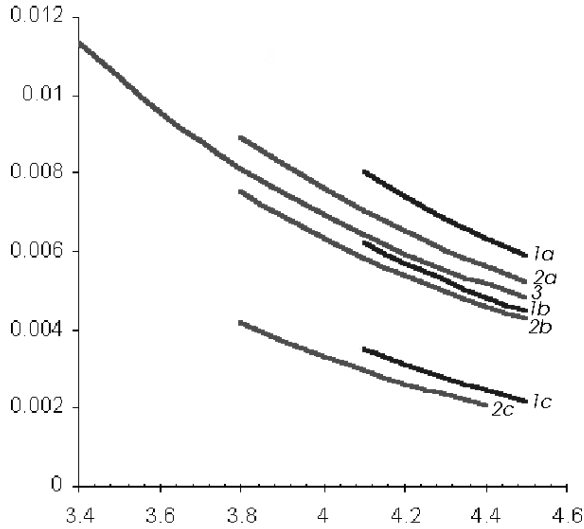


Figura 3. Energía total radiada como función de x_{min} , para distintos valores de μ y para distintos valores de x_{max} . Las curvas 1a, 1b y 1c corresponden a $\mu = 1/4$ (masas iguales), las curvas 2a, 2b y 2c a $\mu = 1/8$ (una masa es aproximadamente 6 veces la otra) y la curva 3 a $\mu = 1/256$ (una masa es aproximadamente 254 veces la otra). Para $\mu = 1/8$ y $1/4$ se graficaron tres x_{max} , estos son ∞ , 20 y 7 que corresponden a las curvas superior, del medio e inferior respectivamente, y para $\mu = 1/256$ se gráfico $x_{max} = \infty$

energía del campo gravitatorio debido a los propios agujeros negros, a diferencia de lo que ocurre en el caso de Araujo y Oliveira.

- La energía total radiada en ondas gravitatorias usando otras aproximaciones y métodos puede ser escrita como un factor de proporcionalidad constante por la masa reducida: $\Delta E = A\mu^2$, pero en nuestro caso, debido a que el potencial depende de μ , este factor “A” no es constante, más bien es una función de μ ; se tiene entonces $\Delta E = A(\mu)\mu^2$. Debido a esto cuando se tienen valores de μ cercanos a $1/4$ (colisiones de agujeros de masas similares), se pueden tener energías totales emitidas muy diferentes para valores de μ un poco diferentes (ver la figura 3):
- La distancia de separación a la que los agujeros negros alcanzan la velocidad de la luz x_{luz} cuando inician su movimiento desde el infinito, depende de

μ . x_{luz} crece cuando las masas entre los agujeros son más similares hasta llegar a 4.08 para agujeros de masas iguales, y decrece cuando son menos similares hasta el límite de 3.34.

- Los valores para la energía total radiada dependen entonces de la masa reducida μ , es decir de la proporción entre las masas de los agujeros, de x_{max} y dependen fuertemente de x_{min} que se escoja (ver la figura 3). Debido a todas estas variables se puede tener una misma energía para distintas características del sistema.
- Se han calculado energías totales emitidas tomando como $x_{min} = x_{luz}$ ver la Tabla 1. Cuando la separación inicial de los agujeros es muy grande, los resultados están extremadamente de acuerdo con los valores calculados mediante otros métodos relativistas [1] y simulaciones computacionales, [2]. Cuando las distancias iniciales son menores los resultados decrecen más rápido que en los otros métodos cuando los agujeros negros son de masas iguales ($\mu = 1/4$), pero cuando los dos agujeros son de masas muy diferentes ($\mu = 1/256$) las energías siguen estando muy de acuerdo con las energías calculadas mediante el método numérico por Anninos.

REFERENCIAS

- [1] Araujo, M., Oliveira, S. 1994 *Static axisymmetric approach for the head-on collision of two black holes*, Physical Review, 52,1995
- [2] Anninos, P., Hobill, D., Siedel, E., Smarr, L., y Suen, W. 1994 *The Head-On Collision of Two Equal Mass Black Holes*, NCSA report No. 048
- [3] Schutz, B. 1985, *A first course in general relativity*, Cambridge University Press
- [4] Thorne, K. 1998 *Probing Black Holes and Relativistic Stars with Gravitational Waves*, Black holes and Relativistic Stars. Edited by Robert Wald. The University of Chicago Press
- [5] Barish, B., Weiss, R. 1999 *Ligo and the detection of gravitational waves* Physics Today, October 1999.
- [6] Florides, P. S., The equivalence of the Tolman and the Moller Mass-Energy Formulae in General Relativity, 1994, Plenum Publishing Corporation.
- [7] Martin J. Rees, V.1998 *Astrophysical Evidence for Black Holes*, Black holes and Relativistic Stars. Edited by Robert Wald. The University of Chicago Press
- [8] Schutz, B., 2000 *Gravitational Radiation*, gr-qc/0003069