

NEBULOSAS GASEOSAS DE HIDRÓGENO Y OXÍGENO CON MÁS DE UNA ESTRELLA EXCITATRÍZ

Urzagasti D.

*Instituto de Investigaciones Físicas
Universidad Mayor de San Andrés
La Paz–Bolivia*

RESUMEN

Se presenta un modelo semi-analítico para regiones HII con más de una estrella excitatriz asociada. Se adoptan nebulosas con densidad uniforme compuestas sólo de H y O (se plantea una aproximación de dos niveles para los átomos e iones del oxígeno). Los espectros emergentes de las estrellas asociadas son considerados como de cuerpos negros y el campo difuso originado en la nebulosa es omitido al considerar los casos A y B. Las ecuaciones del equilibrio de ionización, del balance energético y del transporte radiativo son resueltas en un arreglo cartesiano de celdas mediante el cálculo iterativo de las magnitudes físicas involucradas. De este modo se hallan las estructuras de ionización y de temperatura electrónica para el caso unidimensional de nebulosas con una sola estrella excitatriz y para los casos en dos y tres dimensiones de nebulosas con dos y tres estrellas excitatrices, respectivamente.

Descriptores: astrofísica — regiones HII — nebulosas gaseosas

ABSTRACT

A semi-analytical model is presented for HII regions with more than one associate exciting star. Nebulae are selected with uniform density composed only of H and O (an approach of two levels appears for the atoms and ions of the oxygen). Associate stars are assumed to radiate as blackbodies and the diffuse field caused in the nebula is omitted having considered the cases A and B. The equations of ionization balance, of the energy balance and of the radiative transfer are solved in a Cartesian cells' arrangement by means of the iterative calculation of the involved physical magnitudes. In this way, the structures of ionization and of electronic temperature for the unidimensional case of nebulae with only one exciting star and for the two and three dimensional cases of nebulae with two and three exciting stars, respectively, are obtained.

Key words: astrophysics — HII regions — gaseous nebulae

1. INTRODUCCIÓN

Las nebulosas gaseosas, son nubes de gas y polvo del medio interestelar distribuidas principalmente en los discos de galaxias espirales e irregulares. Están asociadas a estrellas con temperaturas superficiales elevadas, llamadas estrellas excitatrices debido a que la radiación ultravioleta que emiten en gran proporción ioniza el gas nebuloso originando

las conocidas regiones de ionización. Existen dos tipos principales de estas nubes: Las nebulosas brillantes o regiones HII, de formas irregulares y con extensiones de hasta cientos de parsecs, están asociadas en general a más de una estrella excitatriz; es más, en general las estrellas asociadas, estrellas jóvenes, se han formado con parte del gas original de la nebulosa y tienen temperaturas superficiales que van desde los $25 \times 10^3 K$ hasta los $50 \times 10^3 K$,

aproximadamente, es decir, se trata de estrellas de tipo O y B. El otro grupo importante lo conforman las nebulosas planetarias, las cuales están asociadas a una sola estrella excitatriz en su interior y fueron originadas por la expulsión de gas de las estrellas interiores cuando se alejaron de la secuencia principal en su proceso evolutivo. Tienen formas más o menos regulares (esféricas principalmente) y sus extensiones son del orden de los parsecs. Las estrellas asociadas a estos objetos tienen temperaturas superficiales en el rango de $30 \times 10^3 K$ a $100 \times 10^3 K$, aproximadamente (correspondientes a las de los tipos O y WR), y se encuentran en un proceso de rápida evolución al estado de enana blanca. Las densidades en las nebulosas gaseosas son muy bajas, de uno a mil átomos por centímetro cúbico, y sus temperaturas típicas son del orden de los $5 \times 10^3 K$. Se las puede considerar en estado estacionario en las escalas de tiempo de observación y bajo las condiciones tan enrarecidas en las que se encuentran, los procesos elementales de interacción entre materia y radiación no están gobernados por condiciones de equilibrio termodinámico (ni siquiera a un nivel local) en el sentido de que los distintos procesos están desconectados uno de otro y así el número de parámetros para describir a un elemento del sistema es muy grande, a diferencia de lo que ocurre en los procesos termodinámicos usuales, donde, por ejemplo, los sistemas están caracterizados por una única temperatura, mientras que en las nebulosas, siguiendo con el mismo ejemplo, existe una temperatura para ciertos procesos de absorción, otra para ciertos procesos de emisión, una otra para procesos colisionales, etc. No está demás agregar que entonces no se cumple el principio de microreversibilidad de los procesos a nivel elemental sino más bien que están establecidas condiciones de equilibrio estadístico, en el otro extremo del balance detallado. La radiación que ioniza el gas nebuloso cuando es absorbida en la nube sufre atenuación; la radiación emitida es vista en el visible con un espectro continuo sobre el cual están superpuestas líneas de emisión. El polvo, con sólo un 1% de la masa total, tiene el efecto de enrojecer la radiación hacia el IR, pero su presencia no afecta notablemente la estructura de ionización no sólo del H , sino tampoco la de otros elementos menos abundantes. Aparte de la atenuación, la radiación también es diluida por el efecto geométrico de la disminución de la densidad de fotones a medida que se propagan a distancias cada vez mayores de las estrellas excitatrices. Ambos efectos, atenuación y dilución, originan el

agotamiento de los fotones capaces de producir ionizaciones; mientras su número sea apreciable, la ionización del H es alta hasta que, a una cierta distancia de las estrellas asociadas, decae abruptamente debido a un brusco aumento de la tasa de crecimiento del espesor óptico con la distancia; entonces se tiene una región interior de hidrógeno ionizado bien definida, es decir, con una región de transición a la zona de hidrógeno neutro de un espesor muy delgado frente a las dimensiones de la región interior. Estas regiones son las llamadas regiones HII. Pese a la baja abundancia de elementos más pesados que el H y el He , estos elementos son dominantes en el enfriamiento vía las colisiones con electrones libres. Cuando los electrones son liberados en las fotoionizaciones, inicialmente poseen una alta energía cinética, pero después, debido a las colisiones con los átomos e iones de elementos pesados, disminuyen su energía cinética promedio y por lo tanto su temperatura. Esta última es la temperatura nebulosa (o temperatura cinética de las nebulosas).

Este trabajo se inclina al estudio de regiones HII con más de una estrella excitatriz (aunque también puede ser aplicado al caso de una sola estrella asociada), tratando de evitar el problema de una resolución numérica complicada para este caso donde ya no se tiene una simetría esférica. Como un primer paso, considera al oxígeno como único agente de enfriamiento, ya que se ha comprobado por otros trabajos [12,8] que este elemento es uno de los más importantes enfriadores en las nebulosas gaseosas. También, se considera sólo al hidrógeno como agente de atenuación. El efecto del helio es también importante debido a su alta abundancia, pero no se lo considera como una primera simplificación en el estudio. El aspecto más delicado es el de la resolución del problema del transporte radiativo que gobierna la atenuación; para abordarlo de la forma más sencilla posible, se ve necesario dividir el estudio en los casos extremos A y B planeados para los espectros de nebulosas gaseosas.

2. CONDICIONES FÍSICAS EN NEBULOSAS GASEOSAS

En las nebulosas gaseosas las densidades típicas del gas son del orden de $(10 - 10^4)$ átomos por cm^3 , con una abundancia del 70% de H , 27% de He y el restante 3% conformado por elementos más pesados, tales como O , N , C , Ne , Si y otros. Dadas las altas temperaturas de las estrellas excitatrices asociadas, el gas posee un alto grado de ionización,

de tal forma que la densidad en número de electrones libres es aproximadamente igual a la densidad en número del gas. La temperatura típica del gas, que es la temperatura cinética de los electrones libres (temperatura electrónica), es del orden de $(10^3 - 10^4)K$. En lo que se refiere a los procesos elementales, no se establece la microreversibilidad de los mismos: el intervalo de tiempo característico para los procesos de emisión espontánea es $t_{esp} \approx (10^{-8} - 10^{-4})s$ (excepto para el caso de los niveles metaestables, donde la emisión espontánea compite con los procesos colisionales); el de los procesos colisionales es $t_{col} \approx (s - horas)$; el de las fotoionizaciones es $t_{fot} \approx años$; el de los procesos de absorción discreta es $t_{abs} \propto t_{esp}/\mu_\nu$ (donde μ_ν es la densidad de energía radiante y por lo tanto $t_{abs} \gg t_{esp}$); el de las recombinaciones (radiativas) es $t_{rec} \approx (10^5/N_e) años/cm^3$ (donde N_e es la densidad en número de electrones libres); y el de la recombinación triple —también llamada recombinación colisional— es $t_{tri} \approx (10^{15}t_{rec}/N_e)/cm^3$. De esta manera, los procesos *ligado-libre* están gobernados por los procesos de fotoionización y recombinación radiativa; mientras que los procesos *ligado-ligado* están gobernados por los procesos de emisión espontánea y colisionales. [1,2]

Bajo estas condiciones tan enrarecidas, el gas está muy alejado de las condiciones de equilibrio termodinámico, estando más bien establecidas las condiciones del equilibrio estadístico, donde el número de procesos por unidad de volumen y de tiempo que arrancan electrones de un dado estado es igual al número de procesos por unidad de volumen y de tiempo que dejan electrones en el mismo estado. Por otro lado, dado que dominan los procesos de emisión espontánea (excepto en el caso de los niveles metaestables), los átomos del gas están casi todo el tiempo en el estado fundamental [1,2,3].

El transporte radiativo de la energía radiante generada por las estrellas excitatrices obedece, entonces, los siguientes esquemas: Para el caso del continuo, dada una fotoionización, ésta es seguida de una recombinación radiativa, luego de la cual, el electrón decae al nivel fundamental ya sea directamente o en cascada. Para el caso del espectro discreto, dada una absorción discreta, el electrón excitado puede o bien decaer directamente al nivel fundamental (dispersión), o bien decaer al mismo en cascada con la emisión de dos o más fotones (degradación de fotones).

3. EQUILIBRIO DE IONIZACIÓN

3.1. Equilibrio de ionización del hidrógeno

El balance entre las fotoionizaciones y las recombinaciones radiativas —a las que llamaremos de ahora en adelante sólo recombinaciones— por unidad de volumen y de tiempo que involucran al hidrógeno en una dada posición del sistema nebuloso, se expresa con la siguiente igualdad (ecuación del equilibrio de ionización [1,2,11,12]):

$$N(H^0) \int_{\nu_1}^{\infty} 4\pi\alpha_\nu J_\nu \frac{d\nu}{h\nu} = N(H^+)N_e a(H^0, T_c), \quad (1)$$

donde $N(H^0)$, $N(H^+)$, y N_e son las densidades en número (que llamaremos sólo densidades de ahora en más) de H^0 , H^+ y de electrones libres (densidad electrónica), respectivamente; J_ν es la intensidad media de la radiación, α_ν es la sección eficaz de fotoionización del H desde el nivel fundamental —funciones éstas de la frecuencia ν —; ν_1 es la frecuencia umbral de fotoionización del H y $a(H^0, T_c)$ es el coeficiente de recombinación de este elemento, función de la temperatura cinética T_c .

El campo de radiación es la suma de dos campos

$$J_\nu = J_\nu^* + J_\nu^d. \quad (2)$$

El primero, J_ν^* , es el campo estelar, es decir, aquél cuyos fotones son todos originados en las estrellas asociadas. El segundo, J_ν^d , es el llamado campo difuso, cuyos fotones son todos originados en la nebulosa. Dadas las relativamente bajas energías de los electrones libres a las temperaturas nebulares típicas, los únicos procesos (en promedio) capaces de producir fotones que puedan ionizar al H son las recombinaciones al nivel fundamental, y puesto que el coeficiente de recombinación al nivel fundamental, a_{base} , es menor que la mitad del coeficiente de recombinación (total), a [1], se tiene que

$$N(H^0) \int_{\nu_1}^{\infty} 4\pi\alpha_\nu (J_\nu^* - J_\nu^d) \frac{d\nu}{h\nu} =$$

$$N(H^+)N_e [a(H^0, T_c) - 2a_{base}(H^0, T_c)] > 0, \quad (3)$$

es decir, la contribución a las fotoionizaciones es mayor para el campo estelar que para el difuso. Pero pueden ser estudiados los casos extremos de la ionización [1]:

CASO A. Nebulosa con espesor óptico despreciable en todas las líneas Lyman del HI . En este caso todos los fotones de línea de la serie de Lyman emitidos en la nebulosa escapan de la misma sin

sufrir absorción. Ésta es una buena aproximación para nebulosas con relativamente pequeñas cantidades de gas y por lo tanto, en éstas, una primera buena aproximación es considerar que el campo difuso es despreciable frente al estelar, y se puede tomar $J_\nu^d = 0$.

CASO B. Nebulosa con grandes profundidades ópticas en todas las líneas Lyman del $H I$. En este caso, todos los fotones de línea de la serie de Lyman emitidos en la nebulosa son absorbidos en la misma. Como ésta es una buena aproximación para nebulosas con relativamente grandes cantidades de gas, una primera buena aproximación para ellas es suponer que ningún fotón capaz de ionizar al H puede escapar de las mismas. Cuando el espesor óptico es mucho mayor que la unidad ($\tau_\nu \gg 1$), casi todos los fotones capaces de ionizar al H son absorbidos en la nebulosa. Entonces, dado que T_c es relativamente baja, $\alpha_\nu \approx \alpha_{\nu_1}$ (valor máximo de la sección de fotoionización del H), y por lo tanto, el camino libre medio de un fotón capaz de ionizar al H es $\ell_\nu = 1/N(H^0)\alpha_\nu \approx 1/N(H^0)\alpha_{\nu_1}$, y como para un espesor óptico grande se tiene un valor alto de la densidad de H^0 respecto de otros casos, este fotón será absorbido en las inmediaciones del lugar de su emisión; entonces el campo difuso puede ser aproximado por la función fuente:

$$J_\nu^d \approx S_\nu = \frac{j_\nu}{N(H^0)\alpha_\nu}, \quad (4)$$

donde j_ν es el coeficiente de emisión. Ésta es la aproximación llamada *on the spot* (OTS)¹ y con la misma se tiene:

$$N(H^0) \int_{\nu_1}^{\infty} 4\pi\alpha_\nu J_\nu^* \frac{d\nu}{h\nu} = N(H^+) N_e b(H^0, T_c),$$

$$b(H^0, T_c) = a(H^0, T_c) - a_{base}(H^0, T_c), \quad (5)$$

donde $b(H^0, T_c)$ es el coeficiente de recombinación del caso B.

Tanto en el caso A como en el caso B no aparece el campo difuso. A menos que se diga lo contrario, de ahora en adelante se trabajará con el caso A; para el caso B sólo habrá que hacer el cambio $a \rightarrow b$.

3.2. Equilibrio de ionización de otros elementos

Para el caso de otros elementos, la ecuación del equilibrio de ionización tiene la misma forma de

¹Tal vez una traducción apropiada de esta denominación sería "en el mismo lugar".

TABLA 1

Número total de fotones capaces de ionizar H emitidos por segundo por estrellas de tipo espectral TE y temperatura superficial T^* .

TE	T^* ($10^4 K$)	$\log Q^*$ (fot/s)
O5	4,8	49,67
O6	4,0	49,23
O7	3,5	48,84
O9	3,2	48,24
B0	3,0	47,67

(1), a saber:

$$\begin{aligned} N(X^k) \int_{\nu_1(X^k)}^{\infty} 4\pi\alpha_\nu(X^k) J_\nu \frac{d\nu}{h\nu} \\ = N(X^{k+1}) N_e a(X^k, T_c), \end{aligned} \quad (6)$$

donde $N(X^k)$ y $N(X^{k+1})$ son las densidades del elemento X en los estados de ionización k y $k+1$, respectivamente, $\alpha_\nu(X^k)$ es la sección de fotoionización del nivel fundamental de X^k , $\nu_1(X^k)$ es la frecuencia umbral de fotoionización correspondiente y $a(X^k, T_c)$ es el coeficiente de recombinación del ión X^{k+1} .

3.3. Modelo para el equilibrio de ionización

Se considera una nebulosa estacionaria, eléctricamente neutra y no limitada por densidad sino por ionización, es decir, la región HII es completamente interior a la nebulosa. Se toma una densidad uniforme para todos los elementos que constituyen el gas. Así, para el H y en la posición \vec{r} :

$$N(H) = N(H^0, \vec{r}) + N(H^+, \vec{r}), \quad (7)$$

y para otro elemento X cualquiera:

$$N(X) = N(X^0, \vec{r}) + N(X^+, \vec{r}) + N(X^{+2}, \vec{r}) + \dots \quad (8)$$

Inmerso en la nebulosa se encuentra un grupo de estrellas excitatrices de número arbitrario, n , las cuales están dispuestas espacialmente también de forma arbitraria. Para la i -ésima estrella, se puede definir un radio unidad ficticio, R_i , igualando el número de fotones estelares capaces de ionizar H por unidad de tiempo, Q^* , con el número total de recombinaciones del H producidas por unidad de tiempo dentro de la esfera de radio R_i :

$$\frac{4}{3}\pi R_i^3 N(H)^2 a_0 = 4\pi^2 R_i^{*2} \int_{\nu_1}^{\infty} J_{\nu_i}^*(R_i^*) \frac{d\nu}{h\nu} = Q^*, \quad (9)$$

donde R_i^* es el radio de la estrella i , $J_{\nu_i}^*(R_i^*)$ es el campo estelar en su superficie,

$$a_0 = a(H^0, T_0), \quad (10)$$

siendo T_0 un valor típico de la temperatura cinética. También, y sólo a los efectos de esta definición, se ha supuesto que todo el H está en estado ionizado ($N(H^+) = N(H)$) y que $N_e = N(H^+)$. Entonces el radio obtenido es

$$R_i = \left(\frac{Q^*}{4N(H)^2 a_0} \right)^{1/3} \quad (11)$$

(donde se ha usado la aproximación $(3/\pi)^{1/3} \approx 1$) el cual es el radio de la esfera de hidrógeno ionizado, llamada esfera de Strömgren. Valores típicos de Q^* se listan en la tabla 1 [1]. Para el sistema conjunto se define un radio de Strömgren equivalente de la siguiente manera:

$$R = \left(\sum_{i=1}^n R_i^3 \right)^{1/3}, \quad (12)$$

el cual será usado como la escala de longitud.

El campo estelar de la estrella i tiene la siguiente expresión

$$J_{\nu_i}^*(\vec{r}) = \left(\frac{R_i^*}{2|\vec{r} - \vec{r}_i|} \right)^2 J_{\nu_i}^*(R_i^*) e^{-\tau_{\nu_i}(\vec{r})}, \quad (13)$$

donde \vec{r}_i es la posición de la estrella (considerada como un objeto puntual). El factor cuadrático es el factor de dilución geométrica de la radiación estelar y el factor exponencial da cuenta de la atenuación de la radiación estelar a causa de la absorción de la misma en la nebulosa.

En este modelo se realiza una simplificación en el problema del transporte radiativo al considerar que las absorciones se dan —dada su mayor abundancia— sólo por el H . Entonces, el espesor óptico a la frecuencia ν se escribe:

$$\tau_{\nu_i}(\vec{r}) = \alpha_{\nu}(H^0) \int_0^{|\vec{r} - \vec{r}_i|} N(H^0, \vec{r}') dr', \quad (14)$$

donde la integral es realizada a lo largo de la línea recta que parte de la estrella y termina en el punto de posición \vec{r} . De igual manera se plantea, como

TABLA 2

Parámetros de las secciones de fotoionización de H y O .

X^k	$a_1(10^{-18} \text{cm}^2)$	β_1	s	$\nu_1(H)/\nu_1(X^k)$
H	6,30	1,34	2,99	1,00
$OI(^4S)$	2,94	2,66	1,00	1,00
$OI(^2D)$	3,85	4,38	1,50	0,80
$OI(^2P)$	2,26	4,31	1,50	0,73
OII	7,32	3,84	2,50	0,39
$OIII$	3,65	2,01	3,00	0,25

una buena aproximación, que la densidad electrónica es igual a la densidad de hidrógeno ionizado:

$$N_e(\vec{r}) = N(H^+, \vec{r}). \quad (15)$$

Se normalizan las magnitudes del problema usando valores característicos de las mismas. Las posiciones normalizadas son dadas por las expresiones:

$$\vec{x} = \frac{\vec{r}}{R}, \quad v_i = |\vec{x} - \vec{x}_i|. \quad (16)$$

Las fracciones de H^0 y de otros elementos en distintos estados de ionización están dadas por:

$$\eta = \frac{N(H^0)}{N(H)},$$

$$\eta[X^k] = \frac{N(X^k)}{N(X^k) + N(X^{k+1})},$$

$$F[X^k] = \frac{N(X^{k+1})}{N(X^k)} = \frac{1 - \eta[X^k]}{\eta[X^k]}. \quad (17)$$

El espesor óptico característico del sistema puede definirse como

$$\tau_R = R N(H) \alpha_{\nu_1}(H^0), \quad (18)$$

Las secciones de fotoionización tienen una buena representación con la forma interpolante (Seaton, 1958; Burgess, 1960):

$$\alpha_{\nu} = a_1 \left(\frac{\nu}{\nu_1} \right)^{-s} \left[\beta_1 + (1 - \beta_1) \left(\frac{\nu}{\nu_1} \right)^{-1} \right], \quad \nu \geq \nu_1, \quad (19)$$

donde a_1 , β_1 y s son parámetros para cada especie considerada. En la tabla 2 se dan sus valores para el H y el O hasta el grado de ionización considerado en este trabajo. En la misma se dan los valores para

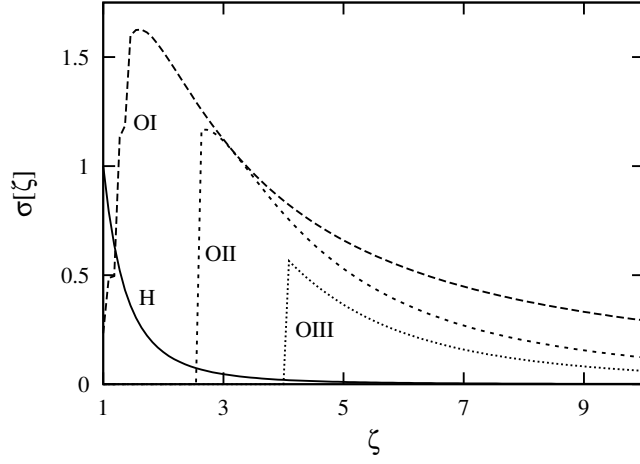
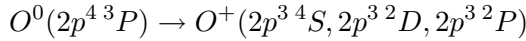


Figura 1. Secciones de fotoionización normalizadas del H y del O en sus distintos estados de ionización considerados.

tres casos de la ionización de OI correspondientes a los tres más importantes procesos para la radiación aprovechable; éstos son:



Tanto la frecuencia como las secciones de fotoionización son normalizadas a los valores de las mismas para el umbral de ionización del H :

$$\zeta = \frac{\nu}{\nu_1(H)}, \quad \zeta_1(X^k) = \frac{\nu_1(X^k)}{\nu_1(H)},$$

$$\sigma[H^0, \zeta] = \frac{\alpha_\nu(H^0)}{\alpha_{\nu_1}(H^0)}, \quad \sigma[X^k, \zeta] = \frac{\alpha_\nu(X^k)}{\alpha_{\nu_1}(H^0)}. \quad (20)$$

En la fig 1 se muestran estas secciones eficaces para el H y el O .

Con las definiciones dadas en las ecuaciones (17), (18) y (20), el espesor óptico correspondiente a la estrella i (ec. 14) toma la forma:

$$\tau_{\zeta i}(\vec{x}) = \tau_R \sigma[H^0, \zeta] \psi_i(\vec{x}), \quad \psi_i(\vec{r}) = \int_0^{v_i} \eta(\mu) d\mu. \quad (21)$$

El coeficiente de recombinación del H (Seaton, 1959) tiene la expresión

$$a(H^0, T_c) = 5,197 \times 10^{-14} \lambda_a^{1/2} \gamma_a \text{ cm}^3/\text{s},$$

$$\gamma_a = 0,4288 + \ln \lambda_a^{1/2} + \frac{0,469}{\lambda_a^{1/3}}, \quad \lambda_a = \frac{157890K}{T_c}; \quad (22)$$

y para el caso B, su expresión es (Hummer & Seaton, 1963):

$$b(H^0, T_c) = 1,627 \times 10^{-13} \lambda_b^{1/2} \gamma_b \text{ cm}^3/\text{s},$$

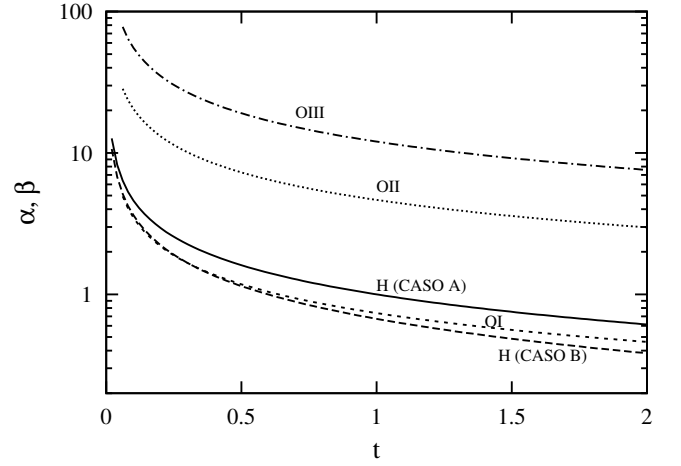


Figura 2. Coeficientes de recombinación normalizados del H y del O en sus distintos estados de ionización considerados y para una temperatura característica $T_0 = 5 \times 10^3 K$.

$$\gamma_b = 1 + 1,657 \log \lambda_b + \frac{0,584}{\lambda_b^{1/3}}, \quad \lambda_b = \frac{10^4 K}{T_c}. \quad (23)$$

La temperatura cinética se normaliza según

$$t = \frac{T_c}{T_0}, \quad (24)$$

y, entonces, los coeficientes de recombinación del H en los casos A y B son normalizados a sus valores en T_0 , $a_0 = a(H^0, T_0)$ y $b_0 = b(H^0, T_0)$, respectivamente:

$$\alpha[H^0, t] = \frac{a(H^0, T_c)}{a_0} = \frac{1}{t^{1/2}} \frac{\gamma_a(t)}{\gamma_a(t=1)};$$

$$\frac{a_0}{b_0} \beta[H^0, t] = \frac{b(H^0, T_c)}{b_0} = \frac{1}{t^{1/2}} \frac{\gamma_b(t)}{\gamma_b(t=1)}. \quad (25)$$

Para el caso de no-hidrogenoides se tiene la siguiente forma para el coeficiente de recombinación (Aldrovandi & Pequignot, 1973):

$$a(X^k, T_c) = A_r \left(\frac{10^4 K}{T_c} \right)^\mu + \frac{A_d}{T_c^{3/2} e^{\frac{T_d}{T_c}}} \left(1 + B_d e^{-\frac{T_1}{T_c}} \right), \quad (26)$$

donde el primer término corresponde a la recombinación radiativa y el segundo a la recombinación dielectrónica. Estos coeficientes se normalizan también al valor de a_0 :

$$\alpha[X^k, t] = \frac{a(X^k, T_c)}{a_0}. \quad (27)$$

En la tabla 3 se dan los valores de los parámetros para el caso del O hasta el máximo grado de ionización considerado y en la figura 2 se grafican los

TABLA 3

Parámetros de los coeficientes de recombinación del O para los estados de ionización considerados.

X^k	$A_r(10^{-12} \text{cm}^3/\text{s})$	μ	$A_d(10^{-3} \text{cm}^3 \text{K}^{3/2}/\text{s})$	$T_d(10^4 \text{K})$	B_d	$T_1(10^4 \text{K})$
OI	0,3	0,678	1,4	17	2,5	13,0
OII	2,0	0,646	1,4	17	3,3	5,8
$OIII$	5,1	0,666	2,8	18	6,0	9,1

coeficientes normalizados para el caso de una temperatura característica $T_0 = 5 \times 10^3 \text{K}$.

En lo que respecta al campo estelar, se adopta la forma de cuerpo negro:

$$J_{\nu_i}^*(R_i^*) \frac{d\nu}{\nu} = \frac{2h\nu_1(H)^3}{c^2} j_i^*(\zeta) d\zeta,$$

$$j_i^*(\zeta) = \frac{\zeta^2}{e^{\zeta/\zeta_i^*} - 1}, \quad \zeta_i^* = \frac{kT_i^*}{h\nu_1(H)} \cong \frac{1}{16} \left(\frac{T_i^*}{10^4 \text{K}} \right), \quad (28)$$

donde T_i^* es la temperatura del cuerpo negro que mejor ajusta el espectro energético de la estrella en cuestión.

Con todo ésto, las formas adimensionales del equilibrio de ionización están dadas por las expresiones:

$$\frac{1 - \eta[X^k]}{\eta[X^k]} (1 - \eta)\alpha[X^k, t] = G_0[X^k],$$

$$G_0[X^k] = \frac{\tau_R}{3} \sum_{i=1}^n \left(\frac{R_i}{R} \right)^3 \frac{H_{0,i}[X^k]}{v_i^2}, \quad (29)$$

donde

$$H_{0,i}[X^k] = \frac{\int_{\zeta_1[X^k]}^{\infty} \sigma[X^k, \zeta] j_i^*(\zeta) e^{-\tau\zeta_i} d\zeta}{\int_1^{\infty} j_i^*(\zeta) d\zeta}, \quad (30)$$

4. BALANCE ENERGÉTICO

Se considera que la ganancia de energía térmica en la nebulosa está gobernada sólo por los procesos de fotoionización del H y que las pérdidas de la misma están determinadas sólo por los procesos de excitación colisionales de átomos e iones de elementos pesados. En particular, de todos ellos se escoge al O por tratarse de uno de los agentes de enfriamiento más eficientes en los sistemas nebulares. La ecuación del balance energético se obtiene,

entonces, igualando las expresiones para la ganancia y la pérdida de energía térmica. Como éstas son funciones de la temperatura cinética del gas, ésta puede ser obtenida de la misma para cada punto de una nebulosa gaseosa.

4.1. Ganancia por fotoionización del H

La ganancia de energía térmica por unidad de volumen y de tiempo en un dado punto de una nebulosa está dada por

$$\Gamma(H^0) = N(H^0) \int_{\nu_1}^{\infty} 4\pi\alpha_{\nu} J_{\nu} h(\nu - \nu_1) \frac{d\nu}{h\nu}. \quad (31)$$

Los electrones liberados en las fotoionizaciones estarán caracterizados por una temperatura cinética inicial, T_{in} . Luego, debido a las sucesivas colisiones sufridas por los mismos, se termalizarán, alcanzando a poseer una distribución Maxwelliana de velocidades caracterizada por la temperatura cinética del gas, T_c . Usando la ecuación del equilibrio de ionización, la energía cinética inicial promedio de los electrones libres está dada por la expresión:

$$\frac{3}{2} kT_{in} = \frac{\int_{\nu_1}^{\infty} 4\pi\alpha_{\nu} J_{\nu} h(\nu - \nu_1) \frac{d\nu}{h\nu}}{\int_{\nu_1(H)}^{\infty} 4\pi\alpha_{\nu} J_{\nu} \frac{d\nu}{h\nu}}. \quad (32)$$

4.2. Pérdida por excitación colisional

Como se mencionó, sólo se considera la pérdida de energía térmica por emisión excitada colisionalmente. En estos procesos, las colisiones de átomos e iones de elementos pesados con electrones libres compiten con la emisión espontánea en el poblamiento y despoblamiento de los niveles metaestables de los mismos. Sea X^k el átomo X en el estado de ionización k con M_k niveles de importancia considerados. La ecuación del equilibrio estadístico para el nivel n se escribe:

$$N_n \left[\sum_{n'=1}^{n-1} A_{nn'} + N_e \sum_{n' \neq n}^{M_k} q_{nn'} \right] = \sum_{n'=n+1}^{M_k} N_{n'} A_{n'n} + N_e \sum_{n' \neq n}^{M_k} N_{n'} q_{n'n}. \quad (33)$$

El miembro izquierdo da cuenta de todos los procesos que despueblan el nivel n por unidad de volumen y de tiempo: por emisión espontánea en el primer término, y por desexcitación colisional en el segundo. El miembro derecho, da el número de procesos que pueblan el nivel n por unidad de volumen y de tiempo: con emisión espontánea en el primer término, y con excitaciones colisionales en el segundo. $A_{nn'}$ es el coeficiente de emisión espontánea y $q_{nn'}$ es el coeficiente para los procesos colisionales, el cual, tiene las siguientes expresiones como función de la temperatura cinética [1,8]:

$$q_{n'n} = \frac{8,63 \times 10^{-6} \gamma_{nn'}}{T_c^{1/2} w_{n'}},$$

$$q_{nn'} = \frac{w_{n'}}{w_n} q_{n'n} e^{-\chi_{nn'}/kT_c} \quad (n < n'), \quad (34)$$

donde $\gamma_{nn'}$ es el coeficiente de intensidad del proceso y w_n es el peso estadístico del nivel n ($w_n = 2j_n + 1$, donde j_n es el número cuántico asociado al momento angular total).

Además de (34) se tiene la ecuación de vínculo:

$$\sum_{n=1}^{M_k} N_n(X^k) = N(X^k), \quad (35)$$

que da el número total de partículas de la especie X^k por unidad de volumen.

Sea $x_n = N_n(X^k)/N(X^k)$ la población relativa del nivel n y $\chi_{nn'} = \chi_{n'n} > 0$ la diferencia de energía entre los niveles n y n' . Entonces, la pérdida de energía térmica por unidad de volumen y de tiempo debida a la excitación colisional de X^k está dada por:

$$P_C(X^k) = N_e N(X^k) \sum_{n=1}^{M_k-1} \sum_{n'=n+1}^{M_k} \chi_{n'n} [x_n q_{nn'} - x_{n'} q_{n'n}]. \quad (36)$$

4.3. Modelo para el balance energético

Dada la complejidad del problema de la obtención de las poblaciones x_n para M_k niveles de importancia, se postula la aproximación con un problema equivalente de dos niveles: Sean s e i los

TABLA 4

Términos (en orden creciente de la energía) para los distintos estados de ionización del oxígeno considerados.

O^0	3P_2	3P_1	3P_0	1D_2	1S_0	—
O^+	$^4S_{3/2}$	$^2D_{5/2}$	$^2D_{3/2}$	$^2P_{3/2}$	$^2P_{1/2}$	—
O^{+2}	3P_0	3P_1	3P_2	1D_2	1S_0	5S_2
O^{+3}	$^2P_{1/2}$	$^2P_{3/2}$	$^4P_{1/2}$	$^4P_{3/2}$	$^4P_{5/2}$	—

índices que denotan a los niveles equivalentes de mayor y menor energía de la dada especie X^k , respectivamente. En ese caso (36) toma la forma:

$$P_C(X^k) = N_e N(X^k) \chi_{si}^T \frac{q_{is}}{1 + N_e \frac{q_{si}}{A_{si}} \left(1 + \frac{q_{is}}{q_{si}}\right)}, \quad (37)$$

donde

$$\chi_{si}^T = \sum_{n=1}^{M_k-1} \sum_{n'=n+1}^{M_k} \chi_{n'n}, \quad (38)$$

$$A_{si} = \frac{1}{\chi_{si}} \sum_{n=1}^{M_k-1} \sum_{n'=n+1}^{M_k} A_{n'n} \chi_{n'n}, \quad (39)$$

$$q_{si} = \frac{1}{\chi_{si}} \sum_{n=1}^{M_k-1} \sum_{n'=n+1}^{M_k} q_{n'n} \chi_{n'n}, \quad (40)$$

y

$$\frac{q_{is}}{q_{si}} = \Omega_{is} e^{-\chi_{is}/kT_c}, \quad (41)$$

con

$$\Omega_{is} = \frac{\sum_{n=1}^{M_k-1} \sum_{n'=n+1}^{M_k} \frac{\chi_{n'n} \gamma_{n'n}}{w_n}}{\sum_{n=1}^{M_k-1} \sum_{n'=n+1}^{M_k} \frac{\chi_{n'n} \gamma_{n'n}}{w_{n'}}} \quad (42)$$

y

$$\chi_{is} = \frac{\sum_{n=1}^{M_k-1} \sum_{n'=n+1}^{M_k} \frac{\chi_{n'n} \gamma_{n'n}}{w_n}}{\sum_{n=1}^{M_k-1} \sum_{n'=n+1}^{M_k} \frac{\gamma_{n'n}}{w_{n'}}}. \quad (43)$$

Sean

$$f(X^k) = \frac{N(X^k)}{N(X)} \quad \text{y} \quad A(X) = \frac{N(X)}{N(H)} \quad (44)$$

la fracción de partículas del elemento X en el estado de ionización k y la abundancia del elemento X

TABLA 5

Parámetros de las funciones $W(O^k, \eta, t)$ para $T_0 = 5 \times 10^3 K$, $N(H) = 10^2 cm^{-3}$ y $A(O) = 10^{-3}$.

O^k	Ω_k	D_k	Q_k	ε_k
O^0	1,00	7,63	$1,8 \times 10^{-6}$	4,43
O^+	0,87	37,91	$3,1 \times 10^{-5}$	4,85
O^{+2}	1,26	226,50	$2,3 \times 10^{-8}$	5,93
O^{+3}	1,35	65,15	$1,0 \times 10^{-9}$	3,07

respecto de la del H , respectivamente. Entonces, la pérdida por excitación colisional toma la forma:

$$P_{EC} = N(H) \sum_X A(X) \sum_{k=0}^{M(X)} f(X^k) [P_C(X^k)/N(X^k)], \quad (45)$$

donde la primera suma se extiende hasta el máximo orden de ionización considerado para el elemento X , $M(X)$, y la segunda se extiende a todos los elementos considerados como agentes de enfriamiento.

En este trabajo se considera como único agente de enfriamiento al oxígeno en sus cuatro primeros estados de ionización. Con ésto y con la normalización introducida en la sección anterior, la ecuación del balance energético, que resulta de igualar (45) con (31), es:

$$\frac{1 - \eta}{\eta} \frac{C(\eta, t)}{t^{1/2}} = G_1[H^0],$$

$$G_1[H^0] = \frac{\tau_R}{3} \sum_{i=1}^n \left(\frac{R_i}{R} \right)^3 \frac{H_{1,i}[H^0]}{v_i^2}, \quad (46)$$

con

$$H_{1,i}[H^0] = \frac{\int_1^\infty \sigma[H^0, \zeta] j_i^*(\zeta) (\zeta - 1) e^{-\tau \zeta^i} d\zeta}{\int_1^\infty j_i^*(\zeta) d\zeta} \quad (47)$$

y

$$C(\eta, t) = \sum_{k=0}^3 f(O^k) W(O^k, \eta, t), \quad (48)$$

donde

$$W(O^k, \eta, t) = \frac{D_k e^{-\varepsilon_k/t}}{1 + (1 - \eta) \frac{Q_k}{t^{1/2}} (1 + \Omega_k e^{-\varepsilon_k/t})}, \quad (49)$$

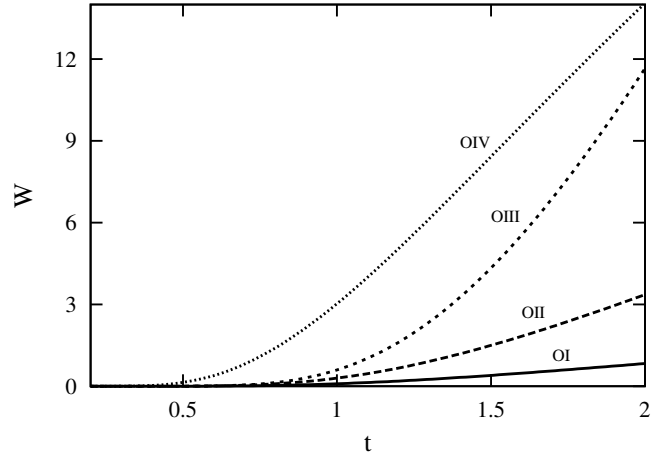


Figura 3. Funciones $W(O^k, \eta, t)$ para $T_0 = 5 \times 10^3 K$, $N(H) = 10^2 cm^{-3}$ y $A(O) = 10^{-3}$.

siendo

$$D_k = \frac{4A(O)}{\gamma_a(1)} \chi_{is}(O^k) \left(\sum_{n=1}^{M_k-1} \sum_{n'=n+1}^{M_k} \frac{\gamma_{n'n}}{w_n} \right)_{O^k}, \quad (50)$$

donde debe reemplazarse $\gamma_a(1)$ por $\gamma_b(1)$ para el caso B,

$$\Omega(O^k) = \Omega_{is}(O^k), \quad \varepsilon_k = \frac{1,44 \chi_{is}(O^k)}{T_0} \quad (51)$$

y

$$Q_k = \frac{N(H)}{T_0^{1/2}} \left(\frac{q_{si}}{A_{si}} T_c^{1/2} \right)_{O^k}. \quad (52)$$

En estas expresiones adimensionales debe darse $N(H)$ en cm^{-3} , T_0 en K y χ_{is} en cm^{-1} .

Se toma como máximo orden de ionización del oxígeno al tercero. Los términos correspondientes considerados para cada estado de ionización se muestran en la tabla 4. La elección de estos términos, así como los valores de las probabilidades de transición, $A_{nn'}$, de las diferencias de energía entre los mismos, $\chi_{nn'}$, y de los coeficientes colisionales, $\gamma_{n'n}$, son tomados del trabajo de C. Mendoza (1982). Los valores de los parámetros de (50), (51) y (52) obtenidos con estos datos son mostrados en la tabla 5 para los valores de los parámetros nebulares $T_0 = 5 \times 10^3 K$, $N(H) = 10^2 cm^{-3}$ y $A(O) = 10^{-3}$. En el cálculo de los mismos se ha considerado, por simplicidad, que los coeficientes colisionales no varían con la temperatura cinética; así, para el O^0 , O^+ y O^{+2} , se han tomado los valores de $\gamma_{n'n}$ correspondientes a una $T_c = 5 \times 10^3 K$,

mientras que para el O^{+3} se han tomado los valores correspondientes a $T_c = 10^4 K$.² En la figura 3 se grafican las funciones $W(O^k, \eta, t)$ usando los datos de la tabla 5. Dados los pequeños valores del parámetro Q_k , la dependencia de estas funciones con η ($0 \leq \eta \leq 1$) es despreciable en todos los casos.

5. INTEGRALES EN FRECUENCIA

En esta sección se suprime el subíndice i que denota a las estrellas para facilitar la notación. Definiendo

$$y = \frac{\zeta}{\zeta_1[X^k]}, \quad t^* = \frac{T^*}{10^4 K}, \quad a^* = \frac{16\zeta_1[X^k]}{t^*}, \quad (53)$$

y para $t^* < 5$, las integrales (30) y (47) se pueden expresar como:

$$H[X^k] = \frac{\zeta_1[X^k]^3}{\frac{a_1[H]}{a_1[X^k]} \frac{e^{-a^*}}{a^*} \left(1 + \frac{2}{a^*} \left(1 + \frac{1}{a^*}\right)\right)} \int_1^\infty (y-1)^r g(y) dy,$$

$$g(y) = \sigma[X^k, y] y^2 e^{-\tau\sigma[H, y] - a^* y},$$

$$\tau = \tau_R \psi, \quad (54)$$

donde $r = 0$ para (30), $r = 1$ para (47) y,

$$\sigma[X^k, y] = y^{-s[X^k]} \left(\beta_1[X^k] + (1 - \beta_1[X^k])y^{-1} \right), \quad (55)$$

En la figura 4 se grafica la función del integrando de (54) para el caso de (30) aplicada al H con $t^* = 4$ para distintos valores del espesor óptico τ y con su máximo normalizado a la unidad. Para valores de τ menores que $\tau \sim 3$, la función es monótonamente decreciente, mientras que para valores mayores el máximo aparece en el espectro y a partir de $\tau \simeq 10$, la función se asemeja a una gaussiana. Similar comportamiento se tiene para el caso

²Según los datos presentados por C. Mendoza para $\gamma_{n'n}$, este coeficiente tiene una muy lenta variación con T_c para los iones O^+ , O^{+2} y O^{+3} , no sufriendo sus valores casi ningún cambio en un amplio rango de temperatura. Para estos casos se adopta el valor dado en tabla correspondiente al menor valor de T_c ($T_c = 5 \times 10^3 K$ para el O^+ y el O^{+2} , y $T_c = 10^4 K$ para el O^{+3}). En el caso del O^0 se observa una variación significativa en los valores de $\gamma_{n'n}$, de hasta dos órdenes de magnitud en el rango que va desde $500 K$ hasta $2 \times 10^4 K$. Sin embargo, para este átomo se adopta el valor del coeficiente colisional a la temperatura típica $T_c = 5 \times 10^3 K$ ya que su importancia se daría para las bajas temperaturas en la delgada región de transición entre la región HII y la HI , la cual no es objeto de un estudio detallado en este trabajo.

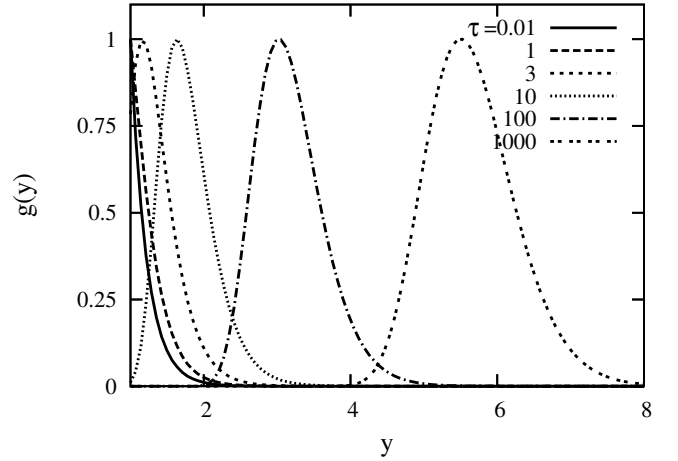


Figura 4. Función $g(y)$ de (54) para el caso de (30) aplicada al H con $t^* = 4$ (el máximo está normalizado a la unidad).

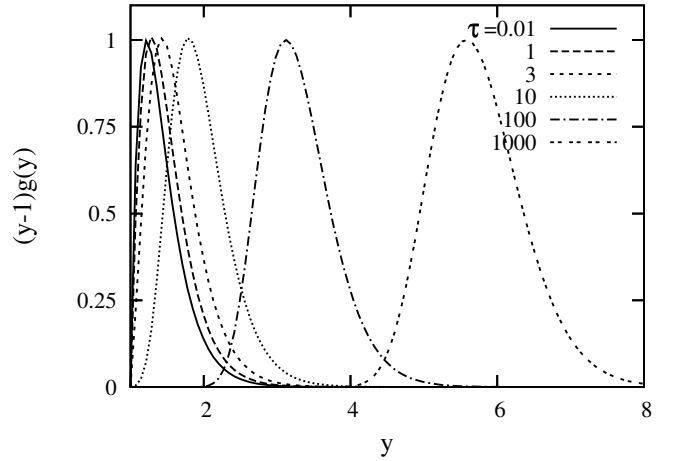


Figura 5. Función $(y-1)g(y)$ (ec. 54) para el caso de (47) aplicada al H con $t^* = 4$ (el máximo está normalizado a la unidad).

del oxígeno en sus distintos estados de ionización excepto en que el valor de τ correspondiente a la aparición del máximo varía algo para cada estado respecto del caso del H . En la figura 5, se grafica $(y-1)g(y)$ para el caso de (47), también con $t^* = 4$. Aquí, a diferencia de la figura anterior, el máximo siempre está presente. Sin embargo, los rangos donde el espectro es apreciable son aproximadamente los mismos que en el caso de (30).

Las integrales fueron realizadas usando cuadraturas de Gauss-Legendre con diez puntos de muestreo [14]. Para lograr una mejor precisión con este método es necesario definir adecuadamente los límites de integración, para que dentro de los cuales se tenga casi toda la contribución de la función a integrar. Para ello se adoptaron los siguientes cri-

terios: Si $\tau < 3$ el rango de integración es $[1, 25/a^*]$, modificándose el límite superior con la adición de términos $1/a^*$ si fuese necesario. Si $\tau \geq 3$ se ajusta una gaussiana a $g(y)$ de manera que coincidan los máximos correspondientes. El punto de máximo del integrando fue encontrado con buena aproximación mediante iteraciones analíticas dando el siguiente resultado:

$$y_m = \frac{A_0}{4} \left[3 + \left(1 - \frac{B_0}{a^* y_0} \right)^{-1} \right],$$

$$y_0 = \left(\frac{3\tau}{a^*} \right)^{1/4},$$

$$A_0 = y_0 \left[\beta_1[H] + \frac{4}{3} (1 - \beta_1[H]) y_0^{-1} \right]^{1/4},$$

$$B_0 = 2 - s[X^k] - \left(\frac{y_0}{\beta_1[X^k]^{-1} - 1} + 1 \right)^{-1}. \quad (56)$$

Con este máximo, los límites de integración elegidos para la integral de (54), $[y_1, y_2]$, están dados por:

$$y_1 = \max \left\{ 1, \frac{-3}{(-c)^{1/2}} + \left(y_m - \frac{b}{2c} \right) \right\},$$

$$y_2 = \frac{5}{(-c)^{1/2}} + \left(y_m - \frac{b}{2c} \right), \quad (57)$$

donde

$$a = \ln g(y_m), \quad b = \frac{d \ln g(y_m)}{dy}, \quad c = \frac{1}{2} \frac{d^2 \ln g(y_m)}{dy^2}. \quad (58)$$

A fin de comprobar que la precisión obtenida es la adecuada, se realizaron también las mismas integrales usando el método trapezoidal con un error del 0,1% [14]. En este método es conveniente trabajar con un intervalo finito de integración, por lo que más bien se utilizó como variable a $x = 1/y$ en el rango de integración $0 \leq x \leq 1$. En la figura 6 se muestra la desviación porcentual entre los resultados para las integrales por el método de cuadraturas y el trapezoidal para el rango de valores del espesor óptico y para $t^* = 4$. Esta desviación es a lo sumo del orden del 1%, valor aceptable que permite el cálculo eficiente de las integrales en frecuencia con cuadraturas de Gauss-Legendre. Similares resultados son obtenidos para otros valores del parámetro de temperatura estelar t^* .

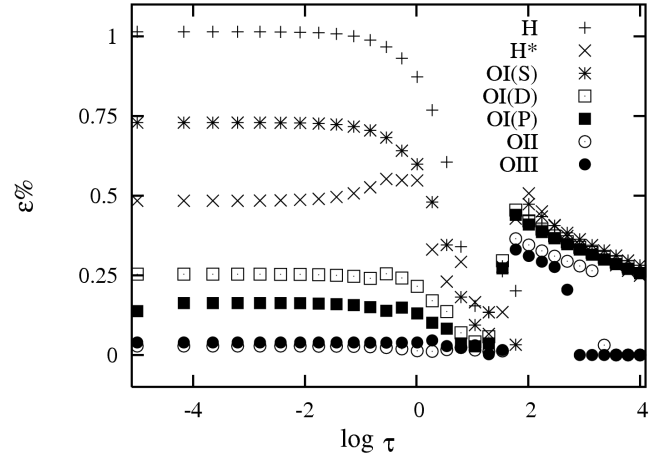


Figura 6. Comparación de los métodos de cuadraturas de Gauss-Legendre y trapezoidal de las integrales en frecuencia (54) para el caso $t^* = 4$ en la forma de una desviación porcentual de los resultados por uno y otro método en el rango de espesores ópticos considerado. H^* corresponde al caso de la integral en (47) y las demás al caso de la integral en (30).

6. MÉTODO DE RESOLUCIÓN

Se plantea un método de aproximaciones sucesivas para la resolución conjunta de las ecuaciones, siendo el objetivo el hallar las fracciones de ionización, la temperatura cinética y los espesores ópticos como funciones de la posición. Para ello se escribe la ecuación (29) para el hidrógeno en la siguiente forma:

$$\frac{1 - \eta}{\eta} = \frac{G_0[H^0]}{(1 - \eta)\alpha[H^0, t]} = p(\vec{x}), \quad (59)$$

Para el oxígeno, las fracciones relativas de ionización, usando (29), son

$$F[O^k] = \frac{K_k}{\eta}$$

$$K_k = (1 - \eta) \frac{\alpha[H^0, t] G_0[O^k]}{\alpha[O^k, t] G_0[H^0]}, \quad (60)$$

y con éstas, las fracciones absolutas de ionización del oxígeno se obtienen de las siguientes expresiones:

$$f(O^0) = \left(1 + F[O^0] \left(1 + F[O^+] \left(1 + F[O^{+2}] \right) \right) \right)^{-1}$$

$$f(O^k) = f(O^{k-1}) F[O^{k-1}], \quad k = 1, 2, 3. \quad (61)$$

Con estas definiciones, la función $C(\eta, t)$ en (48) toma la forma explícita:

TABLA 6

Parámetros de los modelos calculados para el caso de una estrella excitatriz en una nebulosa de H y O limitada por ionización, correspondientes a los resultados mostrados en la figura 7. El radio aproximado de la esfera de Strömrgren, R , fue obtenido para la temperatura cinética $T_c = 5 \times 10^3 K$.

modelo	t^*	$N(H) [cm^{-3}]$	$A(O)$	$R [pc]$	τ_R
a (caso A)	4	10^2	10^{-3}	2,78	5404
b (caso A)	4	10^3	10^{-3}	0,6	11600
c (caso A)	4	10^2	10^{-2}	2,78	5404
d (caso B)	4	10^2	10^{-3}	2,78	5404
e (caso A)	3	10^2	10^{-3}	0,84	1632
f (caso A)	4,8	10^2	10^{-3}	3,9	7575

$$C(\eta, t) = W_3 Z(\eta, t)$$

$$Z(\eta, t) = \frac{\frac{W_0}{W_3} \eta^3 + K_0 \left(\frac{W_1}{W_3} \eta^2 + K_1 \left(\frac{W_2}{W_3} \eta + K_2 \right) \right)}{\eta^3 + K_0 (\eta^2 + K_1 (\eta + K_2))}, \quad (62)$$

donde se ha simplificado la notación con $W_k = W(O^k, \eta, t)$.

Ahora, dado que el término que involucra Q_k en (49) es despreciable frente a la unidad para $t \gg (Q_k(1 - \eta))^2$ (véanse los pequeños valores de Q_k en la tabla 5), la temperatura puede ser obtenida, combinando (46) con (29), usando:

$$\frac{\varepsilon_3}{t} = \ln \left(\frac{D_3 Z(\eta, t)}{(1 - \eta)t^{1/2} \alpha[H^0, t]} \frac{G_0[H^0]}{G_1[H^0]} \right) \quad (63)$$

Entonces el proceso iterativo para la resolución es el siguiente: Se parte con una nebulosa isoterma, $t = 1$, y completamente ionizada, $\eta = 0$. Con estos valores en los miembros derechos de (21), (59) y (63) se obtienen las primeras aproximaciones $\tau_i^{(1)}(\vec{x})$, $\eta^{(1)}(\vec{x})$ y $t^{(1)}(\vec{x})$. Introduciendo estos nuevos valores en los lados derechos de (21), (59) y (63) se obtienen los nuevos resultados $\tau_i^{(2)}(\vec{x})$, $\eta^{(2)}(\vec{x})$ y $t^{(2)}(\vec{x})$, y así sucesivamente, repitiéndose el proceso hasta alcanzar la precisión deseada.

Los cálculos fueron realizados en FORTRAN utilizando reticulados uniformes en la región III cuyo tamaño fue estimado previamente. Las operaciones fueron realizadas para cada celda de la red, obteniendo los valores de las magnitudes físicas en cada iteración. Esta elección resulta muy conveniente, sobre todo en el cálculo del espesor óptico de la integral (21), que fue realizado sumando las contribuciones $\eta(\vec{x}) \Delta v$ (donde Δv es igual o del orden

del ancho de cada celda) a lo largo de la línea recta desde la estrella en cuestión hasta la posición de la celda considerada.

7. RESULTADOS

7.1. Una estrella excitatriz (una dimensión)

Se obtuvieron seis modelos para el caso unidimensional, con simetría esférica, de una estrella excitatriz central en una nube de hidrógeno y oxígeno con densidad uniforme. Las regiones III se consideraron limitadas sólo por ionización, es decir, se consideró en cada caso que la extensión del material a ser ionizado era ilimitada. Los resultados son mostrados en la figura 7 y los parámetros de los modelos en la tabla 6. Los modelos se eligieron variando la densidad de hidrógeno, $N(H)$, la abundancia relativa del oxígeno, $A(O)$, y la temperatura estelar relativa, t^* . Además se consideró el caso A en los modelos calculados, a excepción de uno de ellos en el que se realizó el cálculo para el caso B a fin de analizar las diferencias con el anterior.

En cuanto al cálculo numérico, para cada modelo se tomaron 1000 celdas desde la estrella hasta el borde de la nebulosa. Luego de 40 iteraciones, se vio la convergencia de cada modelo con un error relativo máximo del 0,1 % entre la última y la penúltima iteraciones. En realidad, la discrepancia entre estas iteraciones fue mucho menor a lo largo de casi toda la nebulosa, alcanzando el valor mencionado sólo en unas pocas celdas al final de la misma, cuando la fracción de hidrógeno ionizado ya había caído notablemente.

En todos los modelos, el comportamiento de la fracción de hidrógeno ionizado es el mismo: se tiene una región de hidrógeno casi completamente ionizada hasta el radio de Strömrgren. En las inmedia-

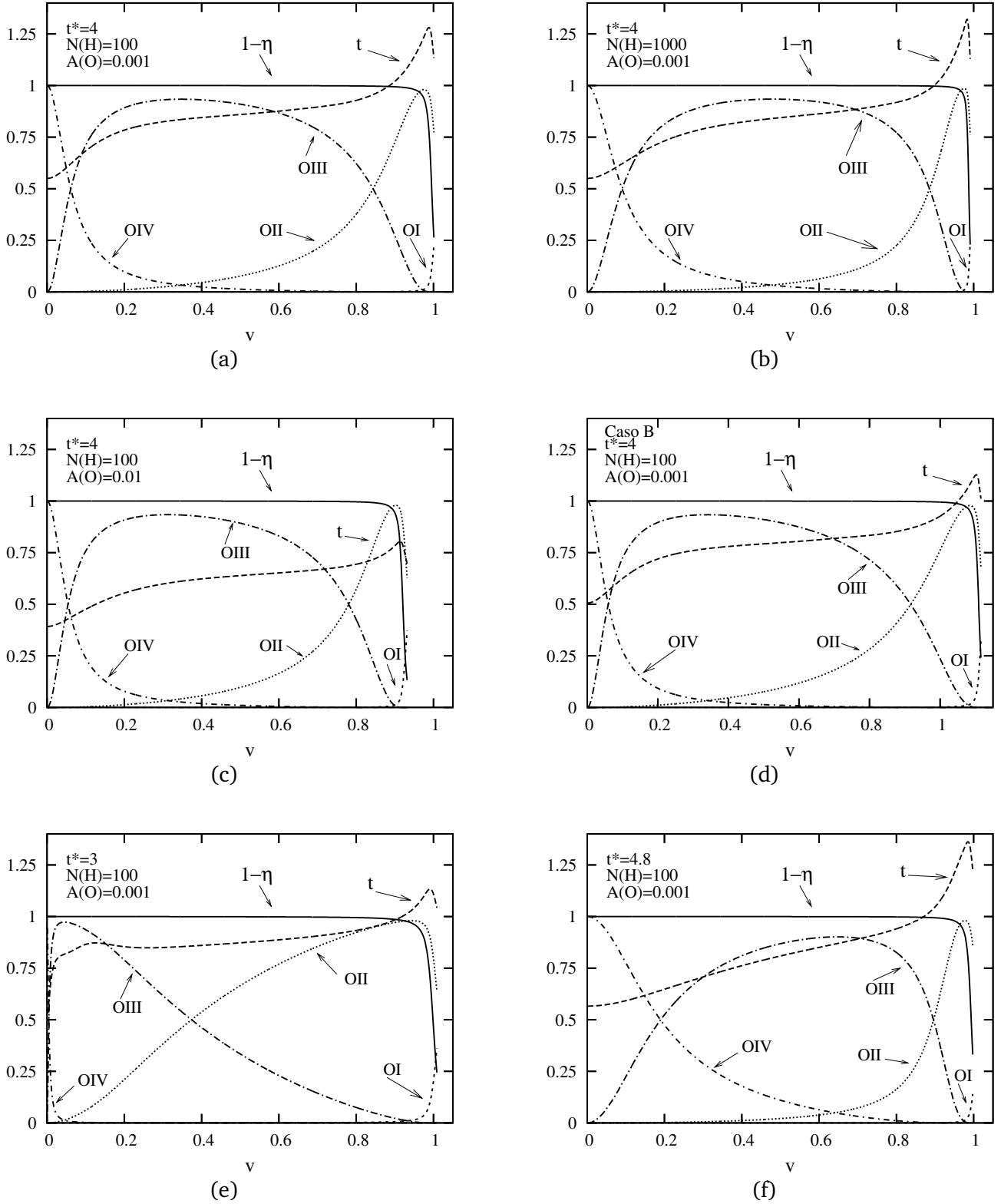


Figura 7. Resultados para las fracciones de ionización y la temperatura cinética (en unidades de $T_0 = 5 \times 10^3 K$) para seis modelos nebulares consistentes de una estrella excitariz inmersa en una nebulosa de H y O limitada por ionización. Los parámetros de los mismos son listados en la tabla 6. La abcisa es la variable radial en unidades del radio de Strömgen calculado para la temperatura cinética $T_c = 5 \times 10^3 K$. Excepto el modelo (d), que corresponde al caso B, todos los demás corresponden al caso A.

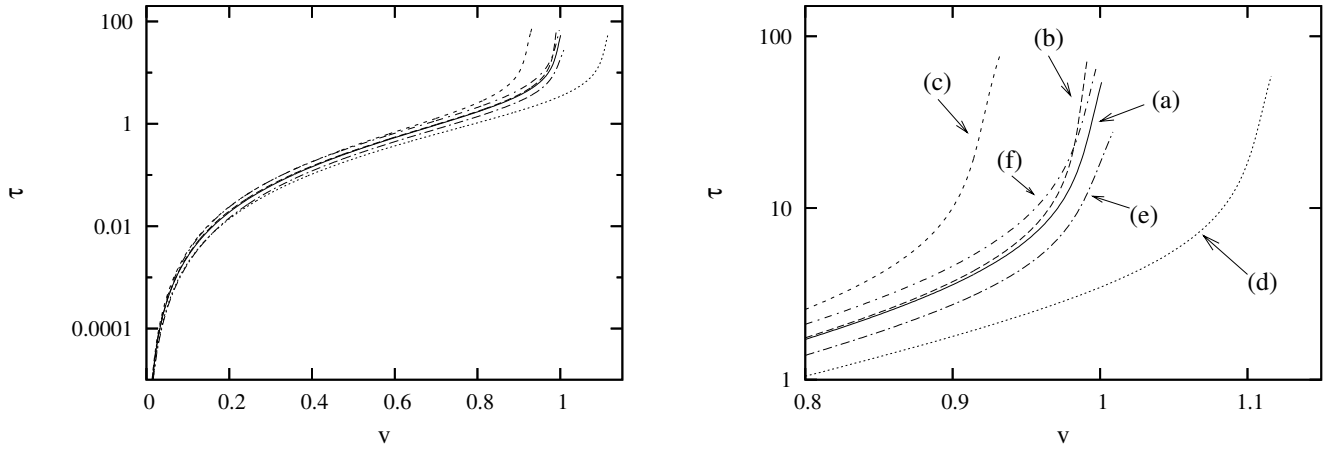


Figura 8. Resultados para el espesor óptico correspondiente a los seis modelos presentados en la tabla 6 y la figura 7.

ciones de este radio, $v = 1$ en la figura 7, la caída de la fracción de HII es muy brusca, esto a causa de una caída brusca de la radiación capaz de ionizar H por la absorción y la dilución de esta radiación.

Por su lado, las estructuras de ionización del oxígeno son similares en los seis modelos pero se presentan diferencias al variar los parámetros: La fracción de OI sólo es apreciable en el borde de la región HII , o bien, lo que se llamará simplemente región de transición $HII-HI$, donde, al igual que la fracción de hidrógeno neutro, comienza a crecer rápidamente hacia el exterior de la región HII . La fracción de OII , en cambio, crece monótonamente desde las regiones más cercanas a la estrella central, alcanzando un máximo en la región de transición y luego decayendo bruscamente a la misma tasa en que crece la fracción de OI . Tomando como referencia los modelos con una estrella central de $T^* = 40 \times 10^3 K$, el modelo (e), con temperatura estelar menor, $T^* = 30 \times 10^3 K$, presenta una mayor cantidad de OII a lo largo de toda la región HII , mientras que en el modelo (f), con temperatura estelar mayor, $T^* = 48 \times 10^3 K$, sucede lo contrario, pero no de manera tan notoria como en el anterior caso. En lo que respecta a la fracción de $OIII$ y para todos los modelos excepto el (e), la cantidad de estos iones es dominante en la región intermedia entre la región cercana a la estrella y la de transición, haciendo que éstos sean los más importantes enfriadores en la mayor parte de la región HII . En el caso del modelo (e), la labor de enfriamiento es compartida por el $OIII$ y el OII . En lo que se refiere a la fracción de OIV , ésta es monótonamente decreciente desde la región cercana a la estrella hacia el exterior, y su importancia se da sólo en las regio-

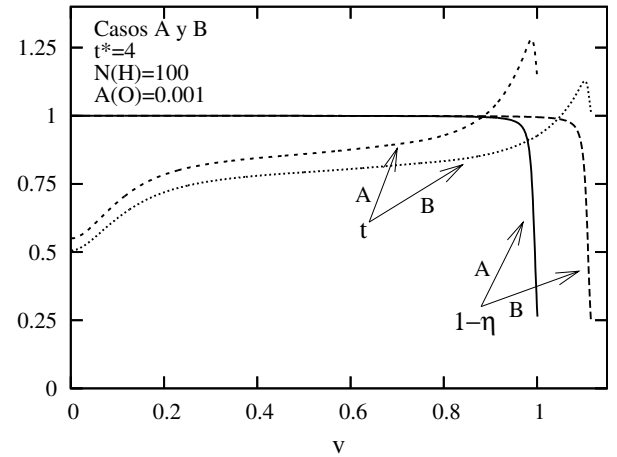


Figura 9. Comparación entre los resultados para la fracción de ionización del H y la temperatura cinética de los casos A y B de los modelos (a) y (d), respectivamente, los cuales son presentados en la tabla 6 y las figuras 7 y 8. Los parámetros estelar y nebular son los mismos, la diferencia se da en que el modelo (a) es calculado para el caso A y el (d) para el caso B.

nes cercanas a la misma. La caída de esta fracción es más rápida en el modelo (e), con una estrella relativamente más fría, mientras que es más lenta en el modelo (f), donde la estrella es relativamente más caliente, lo cual era de esperarse debido a la menor y mayor cantidad de fotones capaces de ionizar al oxígeno en uno y otro caso, respectivamente.

En lo que se refiere al comportamiento de la temperatura cinética, t , éste es aproximadamente similar en los seis modelos, con un crecimiento monótono desde la estrella hasta la región de transición y con una caída brusca en esa región al pasar a la región HI . En todos los casos se tiene un me-

TABLA 7

Parámetros de los modelos calculados para el caso de dos estrellas excitatrices en una nebulosa de H ($N(H) = 10^2 \text{ cm}^{-3}$) y O ($A(O) = 10^{-3}$) limitada por ionización, correspondientes a los resultados mostrados en las figuras 10—15. Los radios aproximados de Strömngren, R_1 y R_2 , fueron obtenidos para la temperatura cinética $T_c = 5 \times 10^3 \text{ K}$. Las posiciones estelares, \vec{x}^* , están dadas en unidades del radio de Strömngren equivalente, R .

modelo	t_1^*	t_2^*	$R_1 [pc]$	$R_2 [pc]$	$R [pc]$	τ_R	celdas	\vec{x}_1^*	\vec{x}_2^*
i (caso A)	4,0	4,0	2,78	2,78	3,51	6809	310 × 219	(0,95, 0,95)	(1,75, 0,95)
ii (caso A)	4,8	4,0	3,90	2,78	4,33	8399	310 × 255	(1,06, 1,06)	(1,83, 1,06)

nor valor de la temperatura en la región central, cercana a la estrella, donde la abundancia del OIV es mayor, indicando que este ión es más eficiente para el enfriamiento de la nube. Por el contrario, los valores de la temperatura y de su tasa de crecimiento con la variable radial, son mayores en las regiones un poco anteriores a la de transición, mostrando que en éstas el $OIII$, cuya abundancia y tasa de crecimiento de la misma es mayor, es menos efectivo para el enfriamiento. En la región de transición, la temperatura alcanza un máximo y luego decae abruptamente, lo cual es debido a que las fotoionizaciones del H , que contribuyen a la energía térmica del medio vía la energía cinética de los electrones liberados, se acaban abruptamente en esa región, pues los fotones capaces de producir ionizaciones fueron consumidos por la absorción y la dilución. Aparte del efecto de la distinta eficiencia del oxígeno en diferentes estados de ionización sobre el comportamiento de la temperatura, también están presentes los efectos de la imperceptible disminución de la fracción de hidrógeno ionizado y el de la absorción selectiva de la radiación (véanse las ecuaciones (62) y (63)). Este último efecto origina un endurecimiento de la radiación ionizante debido a la forma de la sección de fotoionización del hidrógeno (figura 1), que da preferencia a la absorción de fotones de bajas frecuencias. De esta manera, a medida que la radiación ionizante viaja desde la estrella hacia mayores radios, cada vez va quedándose con sus fotones más y más energéticos, los cuales al ser absorbidos por fotoionización, dan lugar a electrones libres también cada vez más energéticos, que contribuyen a su vez a un mayor aumento de la temperatura del medio.

En la figura 8 se grafican los resultados para el espesor óptico como función de la distancia a las estrellas. En las regiones centrales los valores de τ son muy pequeños pero su crecimiento es rápido hasta $v \approx 0,1$. Desde esta distancia hasta $v \approx 0,9$, τ au-

menta en dos órdenes de magnitud, pero lo hace de forma relativamente lenta. A partir de $v \approx 0,9$, cuando $\tau \sim 1$, el espesor óptico comienza a crecer muy rápidamente, alcanzando valores muy grandes en la región de transición, haciendo que en estas regiones externas la nube sea ópticamente muy espesa.

La figura 9 presenta la comparación entre los resultados de los casos A y B (modelos (a) y (d)). Lo que se obtiene es que el tamaño de la región HII en el caso B es mayor a la del caso A, lo cual es consecuencia de que en el B se considera que todos los fotones difusos capaces de ionizar al H son absorbidos en la nebulosa, es decir se tiene una otra fuente de ionización respecto al caso A que hace que la región HII sea mayor en tamaño. La temperatura cinética tiene similar comportamiento en ambos casos, pero en el caso B sus valores son menores que en el caso A, como consecuencia de que el coeficiente de recombinación para el caso B es menor que el del caso A (véanse figura 2 y ec. (63)).

7.2. Dos estrellas excitatrices (dos dimensiones)

Se calcularon dos modelos, cuyos parámetros se muestran en la tabla 7 y los resultados en las figuras 10—15. La diferencia entre ellos está sólo en los valores de la temperatura superficial estelar relativa, $t^* = 4$ para ambas estrellas en el modelo i y $t_1^* = 4,8$ y $t_2^* = 4$ para el modelo ii. En ambos casos se tomaron 40 iteraciones con un error máximo del 1% entre las últimas iteraciones sucesivas.

En la figura 10 se grafica la fracción de ionización del H , que viene dada por la envolvente superior de los puntos que representan sus valores en cada celda de la red. De igual manera que en el caso de una estrella, se tiene una abrupta caída de la ionización de este elemento debido a la absorción y a la dilución. Las esferas de Strömngren de cada estrella, que son representadas por circunferencias en dicha figura, nos indican que fuera de la región de

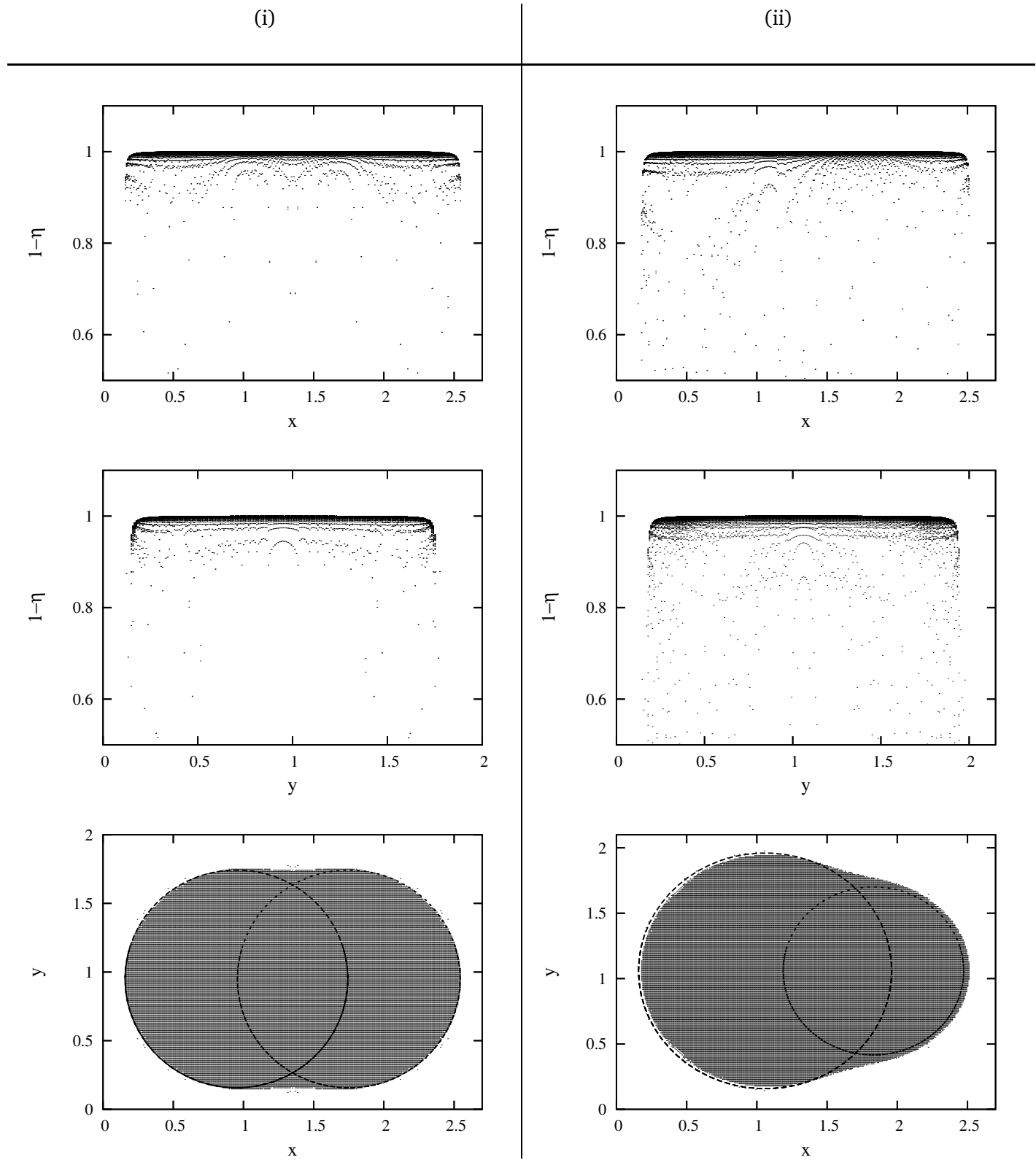


Figura 10. Fracción de ionización del H , $1 - \eta = N(HII)/N(H)$, para los modelos i y ii (tabla 7). Los ejes x y y están dados en unidades del radio de Strömgren equivalente, R , y se presentan los valores de esta magnitud en las celdas del arreglo. En el caso de las proyecciones sobre el plano x - y , las superficies de las esferas de Strömgren de las estrellas están representadas por circunferencias.

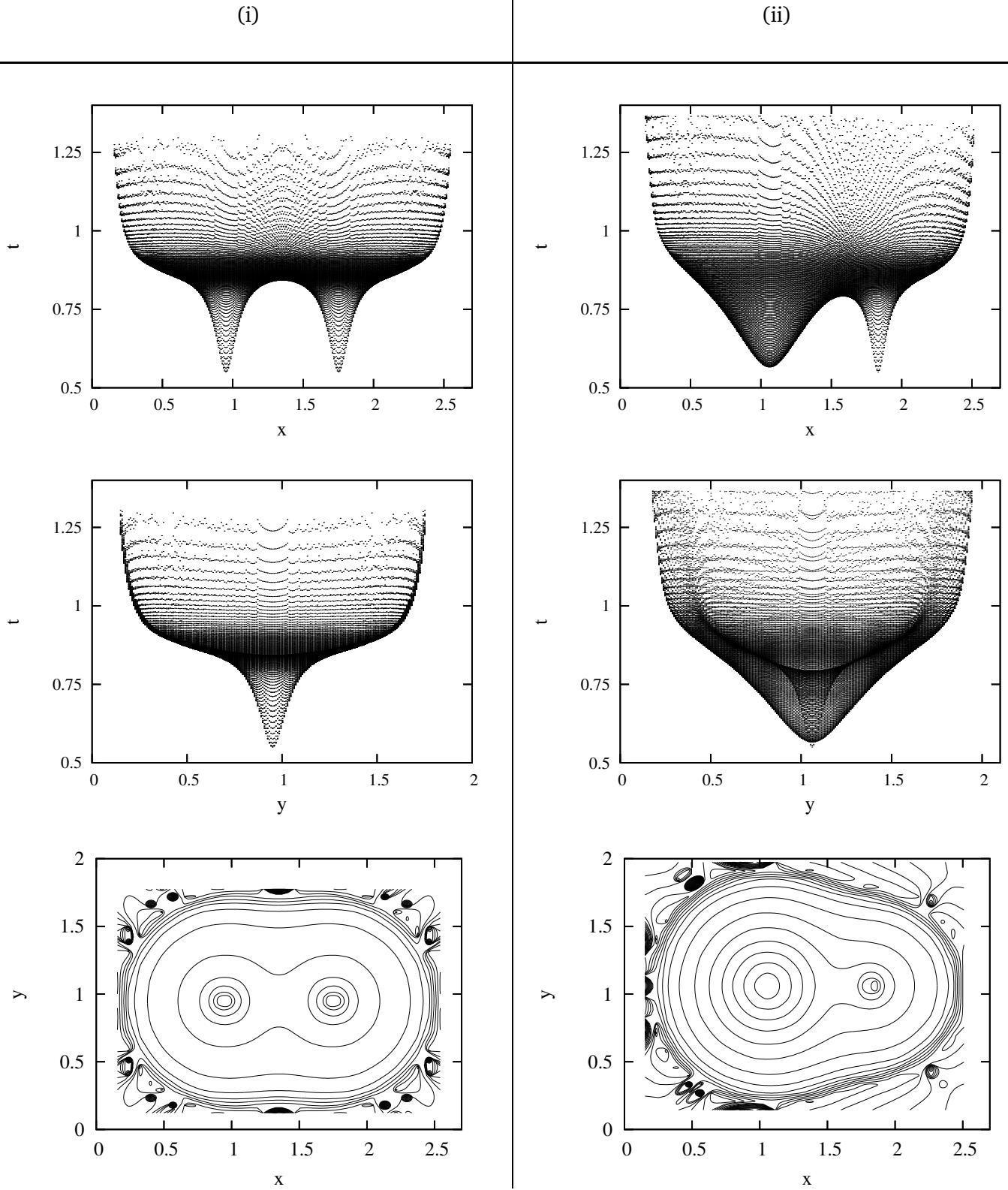


Figura 11. Temperatura cinética (en unidades de $T_0 = 5 \times 10^3 K$) para los modelos i y ii (tabla 7). Los ejes x y y están dados en unidades del radio de Strömgen equivalente, R . Se presentan los valores de esta magnitud en las celdas del arreglo y los contornos de nivel en el plano x - y .

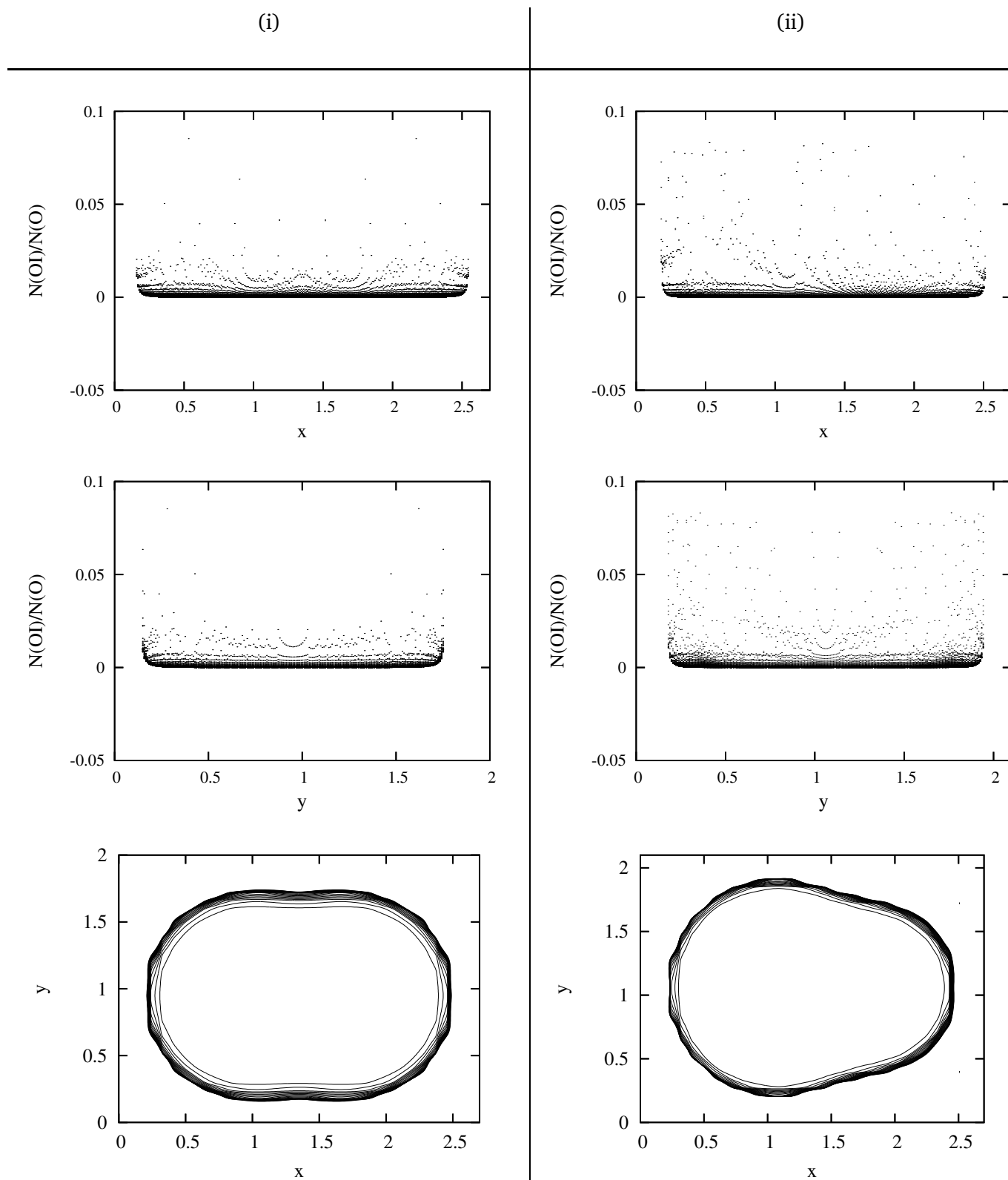


Figura 12. Fracción de ionización del OI para los modelos i y ii (tabla 7). Los ejes x y y están dados en unidades del radio de Strömgen equivalente, R . Se presentan los valores de esta magnitud en las celdas del arreglo y los contornos de nivel en el plano x - y .

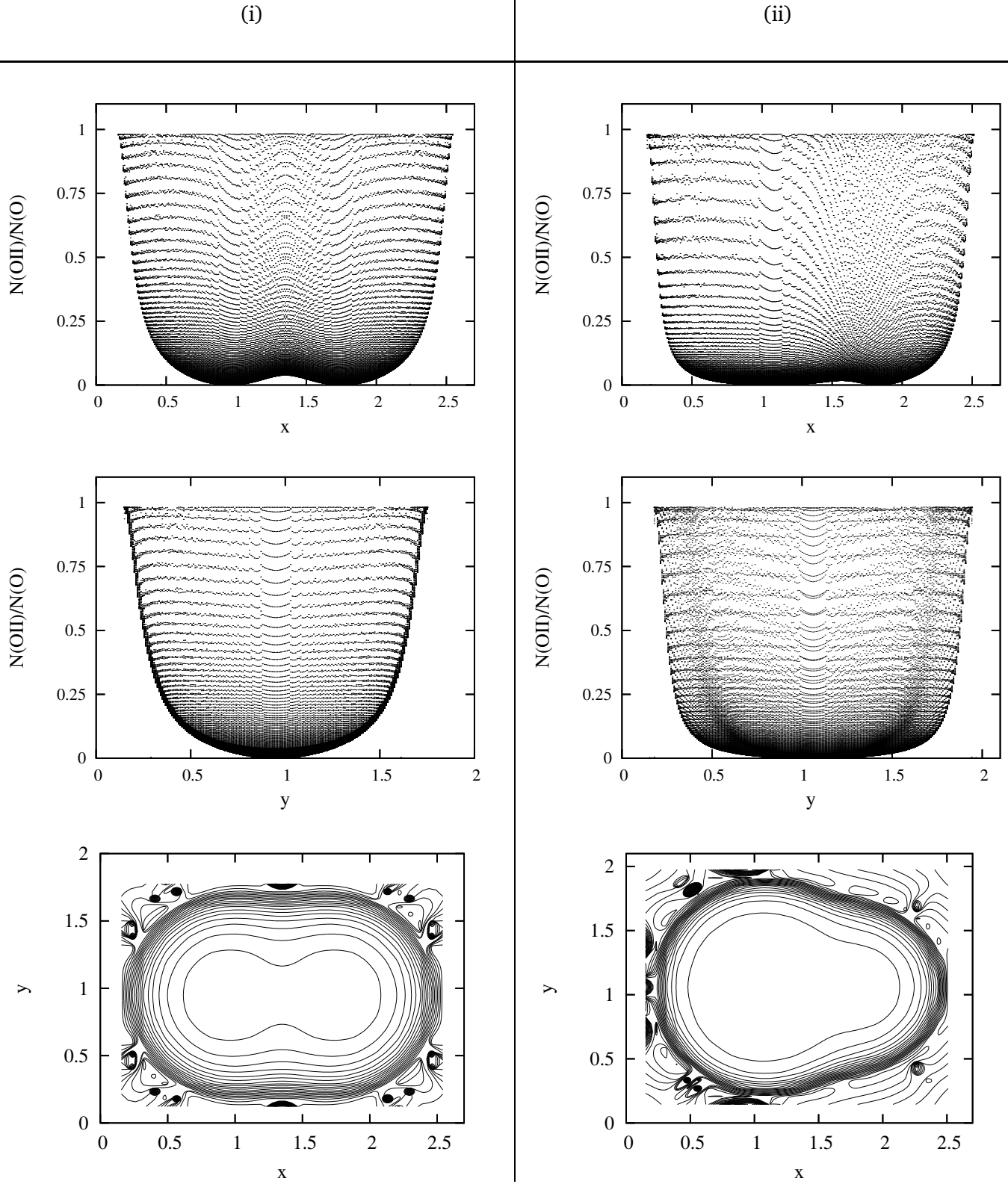


Figura 13. Fracción de ionización del *OII* para los modelos i y ii (tabla 7). Los ejes x y y están dados en unidades del radio de Strömgren equivalente, R . Se presentan los valores de esta magnitud en las celdas del arreglo y los contornos de nivel en el plano x - y .

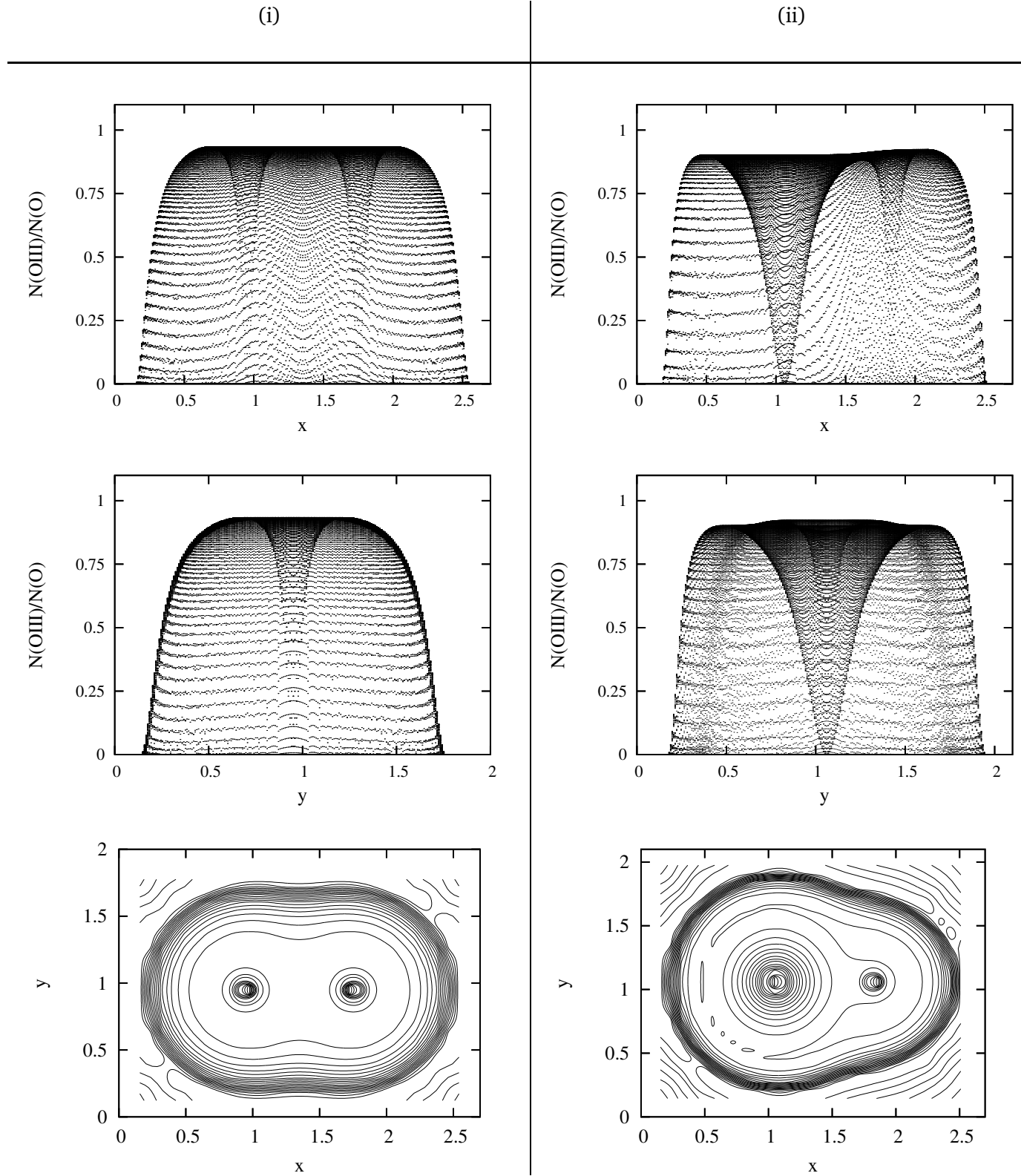


Figura 14. Fracción de ionización del $OIII$ para los modelos i y ii (tabla 7). Los ejes x y y están dados en unidades del radio de Strömgen equivalente, R . Se presentan los valores de esta magnitud en las celdas del arreglo y los contornos de nivel en el plano x - y .

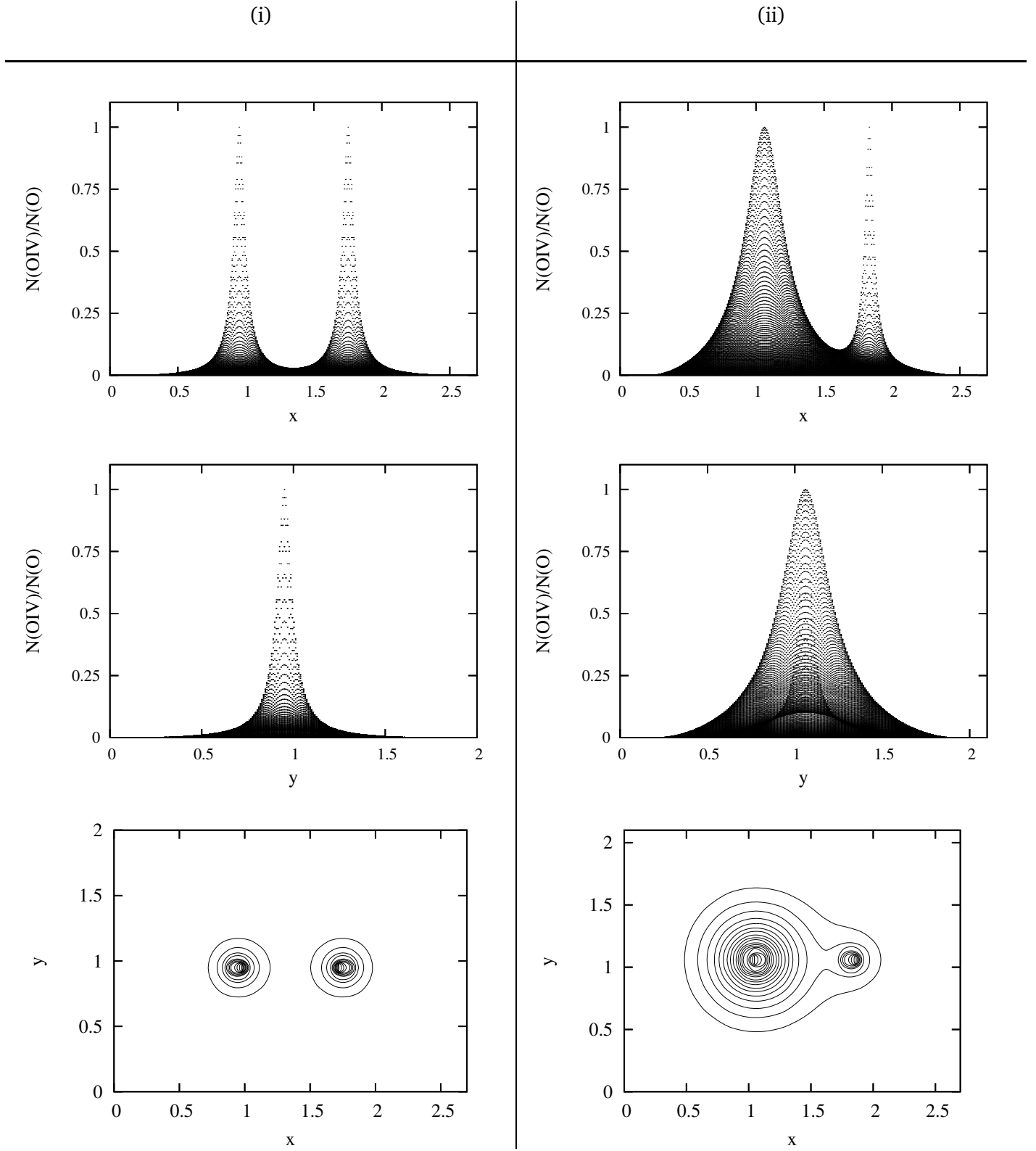


Figura 15. Fracción de ionización del OIV para los modelos i y ii (tabla 7). Los ejes x y y están dados en unidades del radio de Strömgren equivalente, R . Se presentan los valores de esta magnitud en las celdas del arreglo y los contornos de nivel en el plano $x-y$.

TABLA 8

Parámetros del modelo (caso A) calculado para el caso de tres estrellas excitatrices en una nebulosa de H ($N(H) = 10^2 \text{ cm}^{-3}$) y O ($A(O) = 10^{-3}$) limitada por ionización, correspondientes a los resultados mostrados en las figuras 16—25. Los radios aproximados de Strömrgren, R_1 , R_2 y R_3 , fueron obtenidos para la temperatura cinética $T_c = 5 \times 10^3 K$. Las posiciones estelares, \vec{x}^* , están dadas en unidades del radio de Strömrgren equivalente, R .

t_1^*	t_2^*	t_3^*
4,8	4,0	3,5
$R_1 [pc]$	$R_2 [pc]$	$R_3 [pc]$
3,90	2,78	2,06
$R [pc]$	τ_R	celdas
4,48	8692	$150 \times 98 \times 114$
\vec{x}_1^*	\vec{x}_2^*	\vec{x}_3^*
(1,18; 1,18; 1,18)	(2,29; 1,18; 1,18)	(1,90; 1,18; 1,73)

intersección de éstas la estructura de ionización es similar a la que se obtendría si no existiera una estrella compañera, mientras que una desviación de la estructura aparece en la regiones un poco más externas a los puntos de intersección de las circunferencias, hasta donde se extiende la región HII. Por otro lado, debe señalarse que fuera de la región de intersección no hay coincidencia entre las circunferencias que representan a las esferas de Strömrgren y los bordes de las regiones HII, coincidencia que existe en los modelos de la sección anterior. Esta diferencia es debida a que el número de celdas sobre cada eje en los presentes modelos es menor, lo que origina mayores errores de redondeo en el cálculo del espesor óptico; errores que son apreciables sólo en las regiones cercanas al borde de la región HII, donde una mayor resolución es necesaria para la obtención de la estructura. Respecto de este punto, las pruebas realizadas muestran que la mejor forma de lograr una mayor precisión es aumentar el número de celdas y no tanto así el número de iteraciones.

La figura 11 muestra los comportamientos de la temperatura cinética según los ejes x y y . Cuando se grafica t versus x ó y , su comportamiento viene dado por la envolvente inferior de los puntos que representan sus valores en todas las celdas. La diferencia con los casos de una sola estrella excitatriz se da en la región intermedia de las dos estrellas,

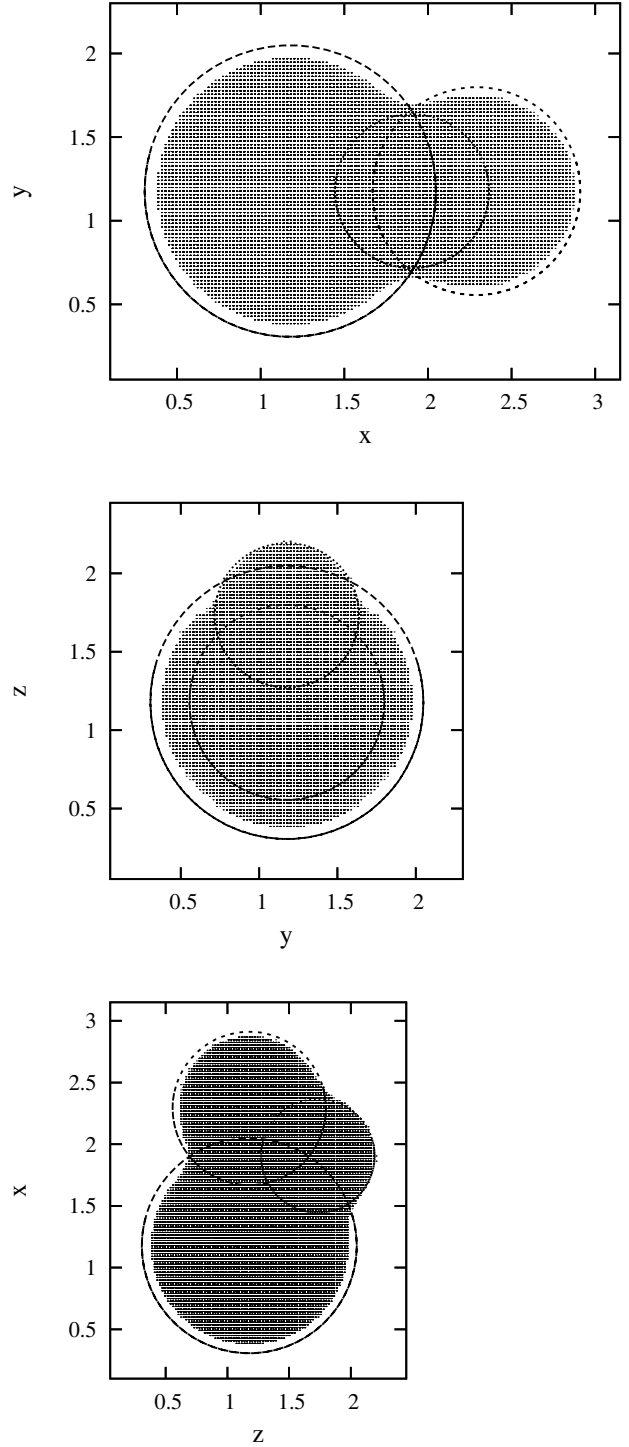


Figura 16. Estructuras de la región HII correspondiente al modelo de la tabla 8 vistas como proyecciones sobre los tres planos cartesianos. Los ejes están en unidades del radio de Strömrgren equivalente, R , y las esferas de Strömrgren de las tres estrellas son representadas por circunferencias.

donde la temperatura cinética alcanza un máximo local. De igual manera con las fracciones de ionización del oxígeno, que se presentan en las figuras

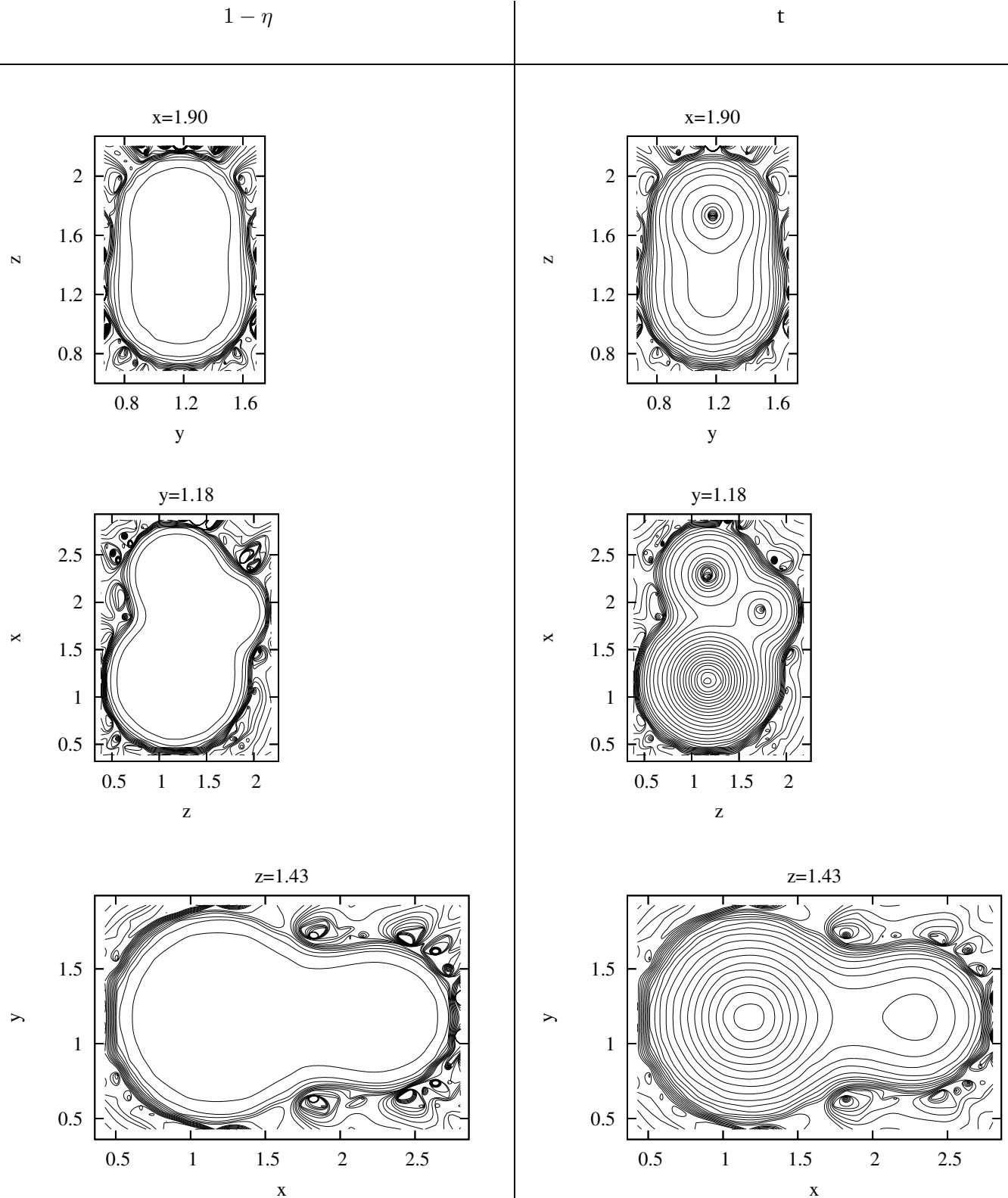


Figura 17. Contornos de nivel para la fracción de ionización del H y la temperatura cinética t en el modelo de tres estrellas excitatrices (tabla 8). Los ejes están dados en unidades del radio de Strömgen equivalente, R .

12—15, donde los comportamientos en las regiones externas a la de intersección de las esferas de Strömgen son similares a los casos de una sola estrella de la figura 7, mientras que en la de intersec-

ción, las fracciones de ionización varían en forma continua alcanzando máximos y mínimos locales en casi todos los casos.

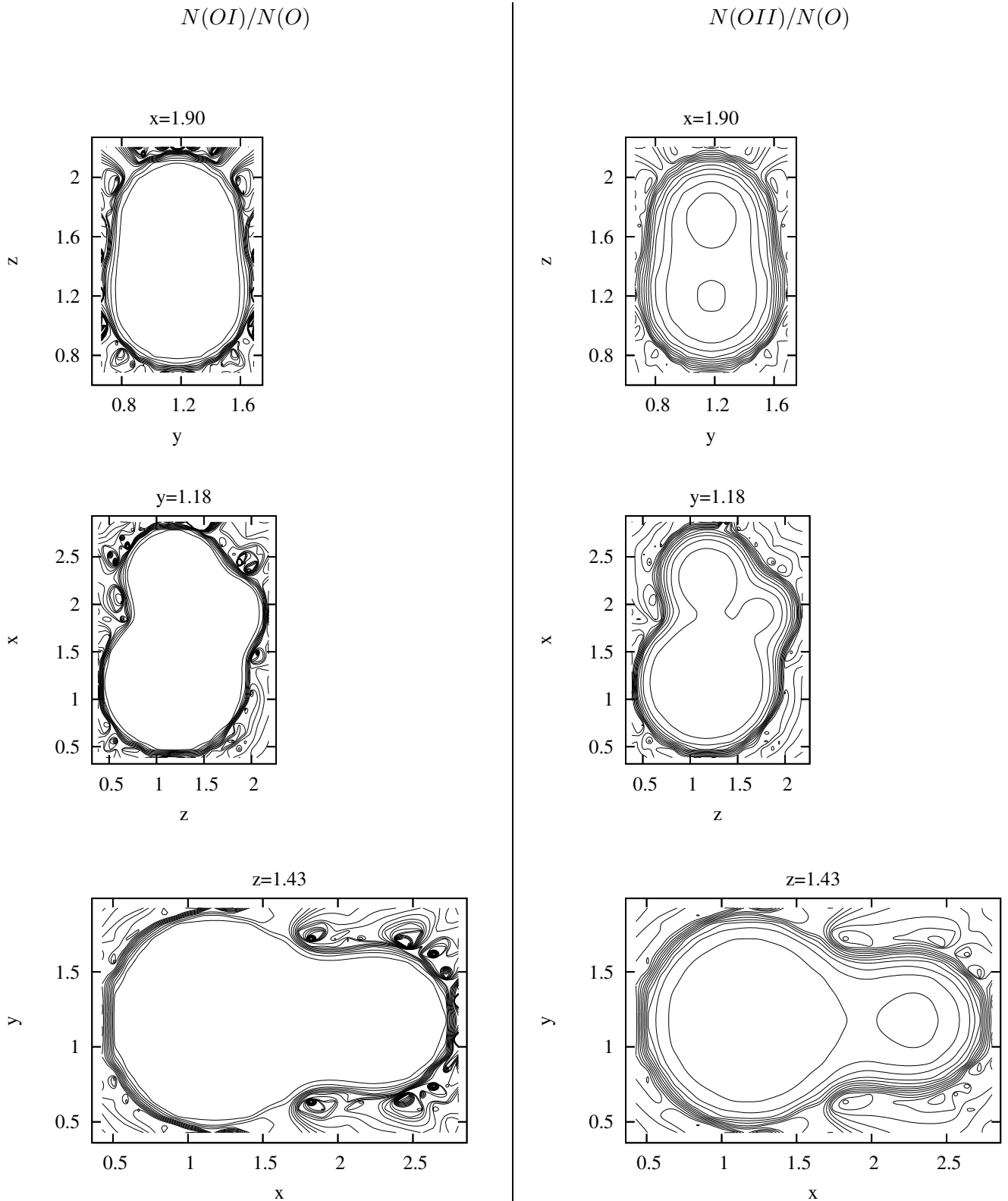


Figura 18. Contornos de nivel para las fracciones del OI y del OII en el modelo de tres estrellas excitatrices (tabla 8). Los ejes están dados en unidades del radio de Strömgen equivalente, R .

7.3. Tres estrellas excitatrices (tres dimensiones)

En este caso se ha calculado un modelo cuyos parámetros se listan en la tabla 8 y los resultados se muestran en las figuras 16—25. De la misma forma

que en los modelos anteriores, se realizaron 40 iteraciones y la discrepancia máxima alcanzada entre las últimas iteraciones fue del 1%. En la figura 16 se muestran las proyecciones de la estructura de la

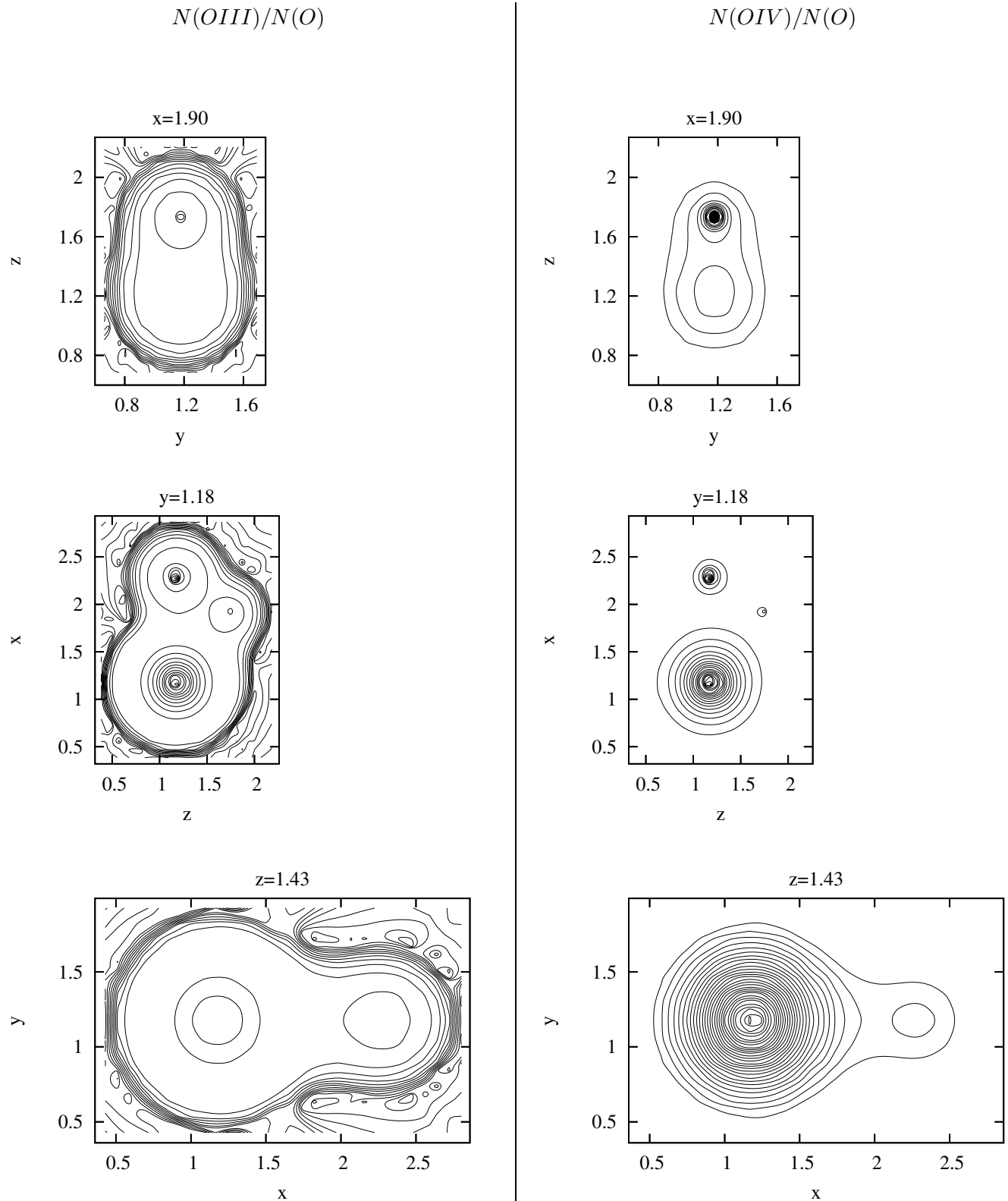


Figura 19. Contornos de nivel para las fracciones del $OIII$ y del OIV en el modelo de tres estrellas excitatrices (tabla 8). Los ejes están dados en unidades del radio de Strömberg equivalente, R .

región HII encontrada en los tres planos cartesianos. En ellas se representan con circunferencias las esferas de Strömberg de las estrellas consideradas. Como se puede ver en esta figura, dichas circunfe-

rencias no coinciden del todo con la región HII pero esto es debido, como en el modelo de dos estrellas, a que el número de celdas sobre cada eje es significativamente menor al del caso de una sola estrella,

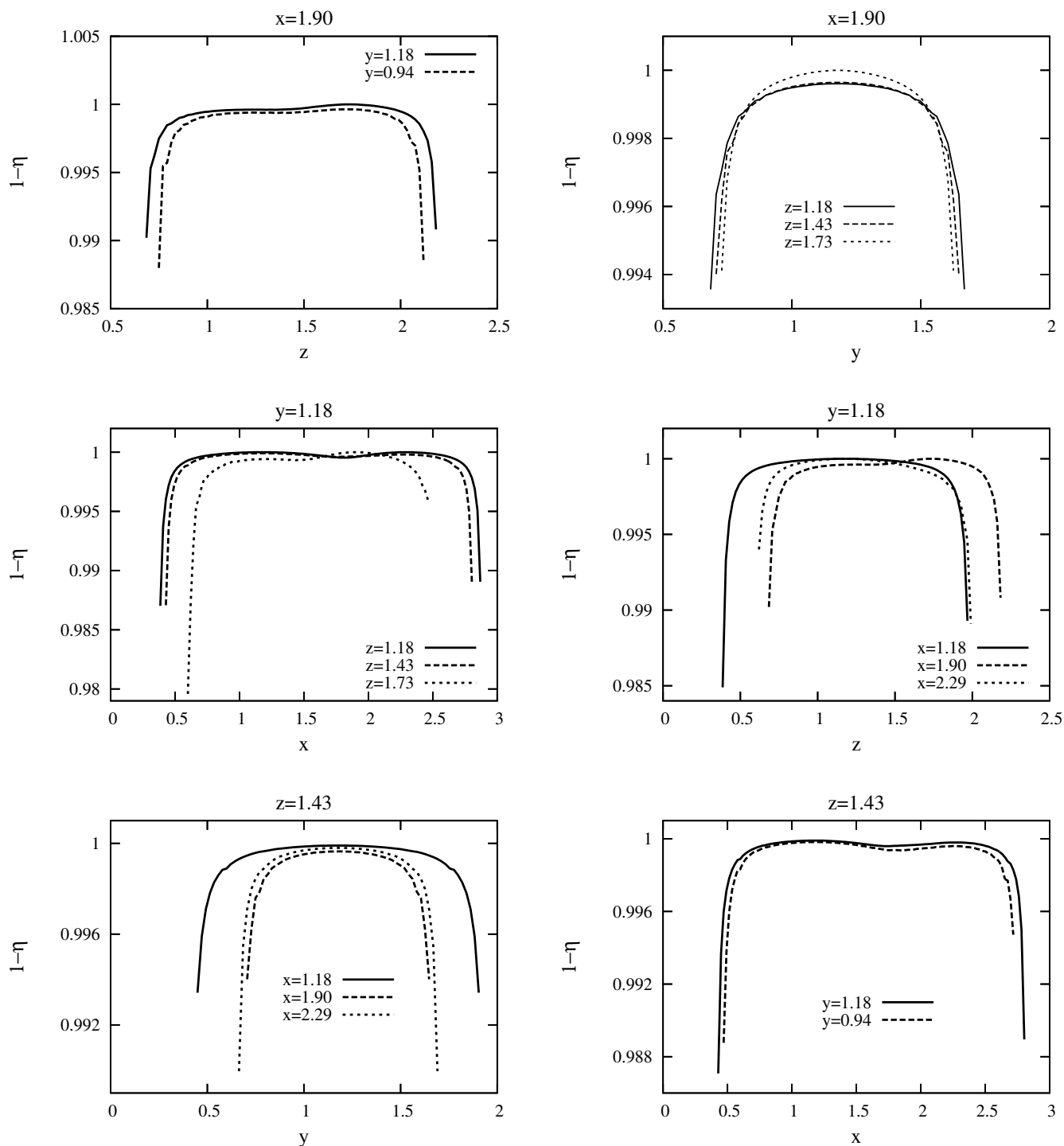


Figura 20. Fracción de ionización del H en el modelo de tres estrellas excitatrices (tabla 8). Los ejes están dados en unidades del radio de Strömgen equivalente, R .

presentándose, entonces, errores de redondeo que son importantes sólo en la delgada región de transición entre las regiones HII y HI.

Aquí la conclusión es la misma que en la sección anterior: las regiones alejadas a la región de intersección de las esferas de Strömgen de las tres estrellas presentan similar comportamiento estruc-

tural al que se tendría si se éstas se estudiasen separadamente; mientras que en la mencionada región de intersección, las estructuras de ionización y de la temperatura cinética son modificadas de manera que en ella estas magnitudes alcanzan máximos y mínimos locales. En este caso, los fotones estelares tienen chance de penetrar en regiones más lejanas

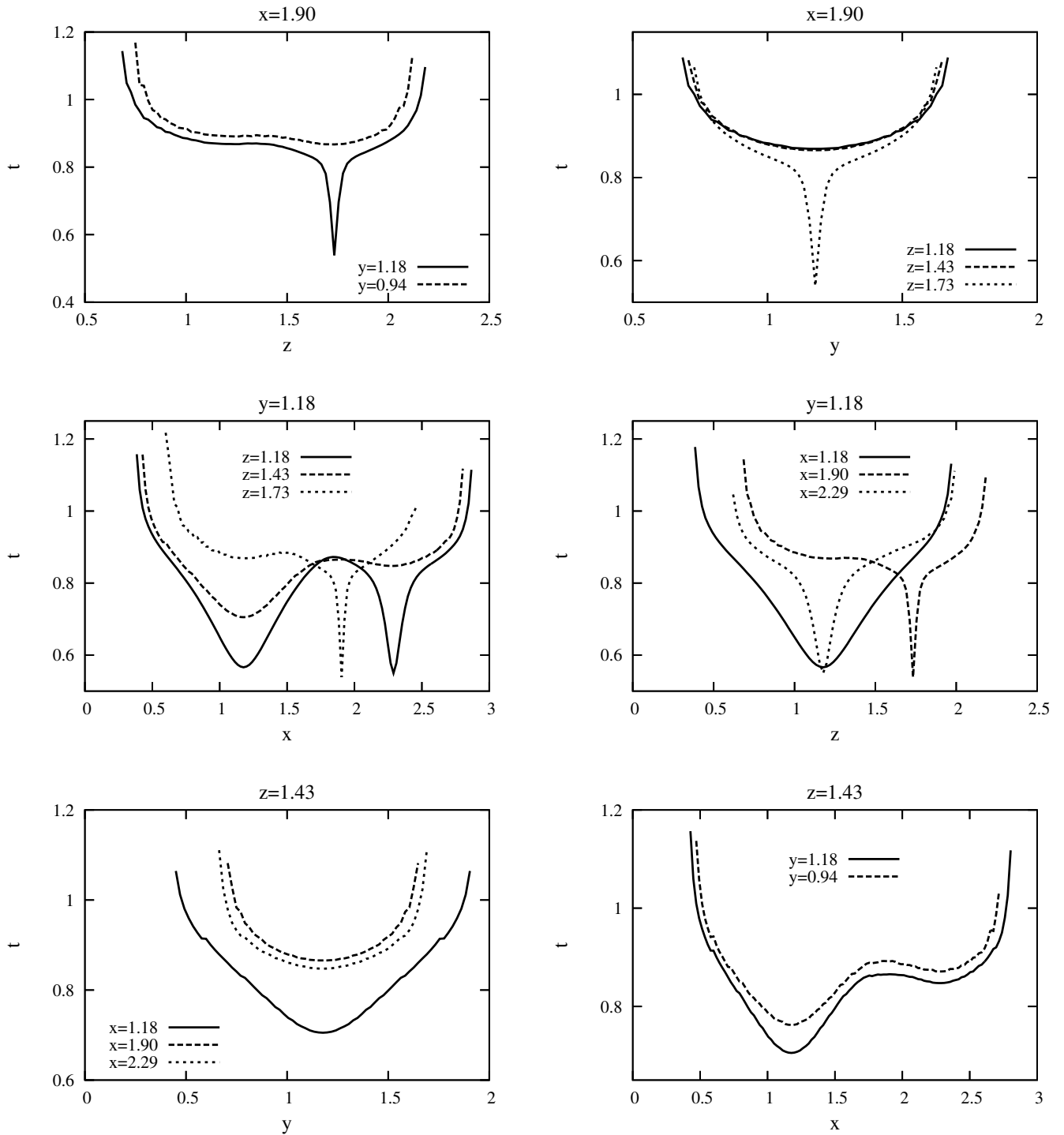


Figura 21. Temperatura cinética t (en unidades de $T_0 = 5 \times 10^3 K$) en el modelo de tres estrellas excitatrices (tabla 8). Los ejes están dados en unidades del radio de Strömberg equivalente, R .

a su fuente, pero no tanto como para llegar a afectar la estructura de las partes más exteriores de la región HII resultante.

8. SUMARIO Y CONCLUSIONES

Se han estudiado las condiciones físicas en las nebulosas gaseosas para poder elegir los procesos

adecuados para ser incluidos en un modelo realista de regiones HII con más de una estrella excitatriz. Con tal fin, se ha elegido una nebulosa modelo compuesta sólo por hidrógeno y oxígeno; el primero regula los procesos de fotoionización y calentamiento y el segundo, los procesos de enfriamiento. Se han construido y normalizado las ecuaciones

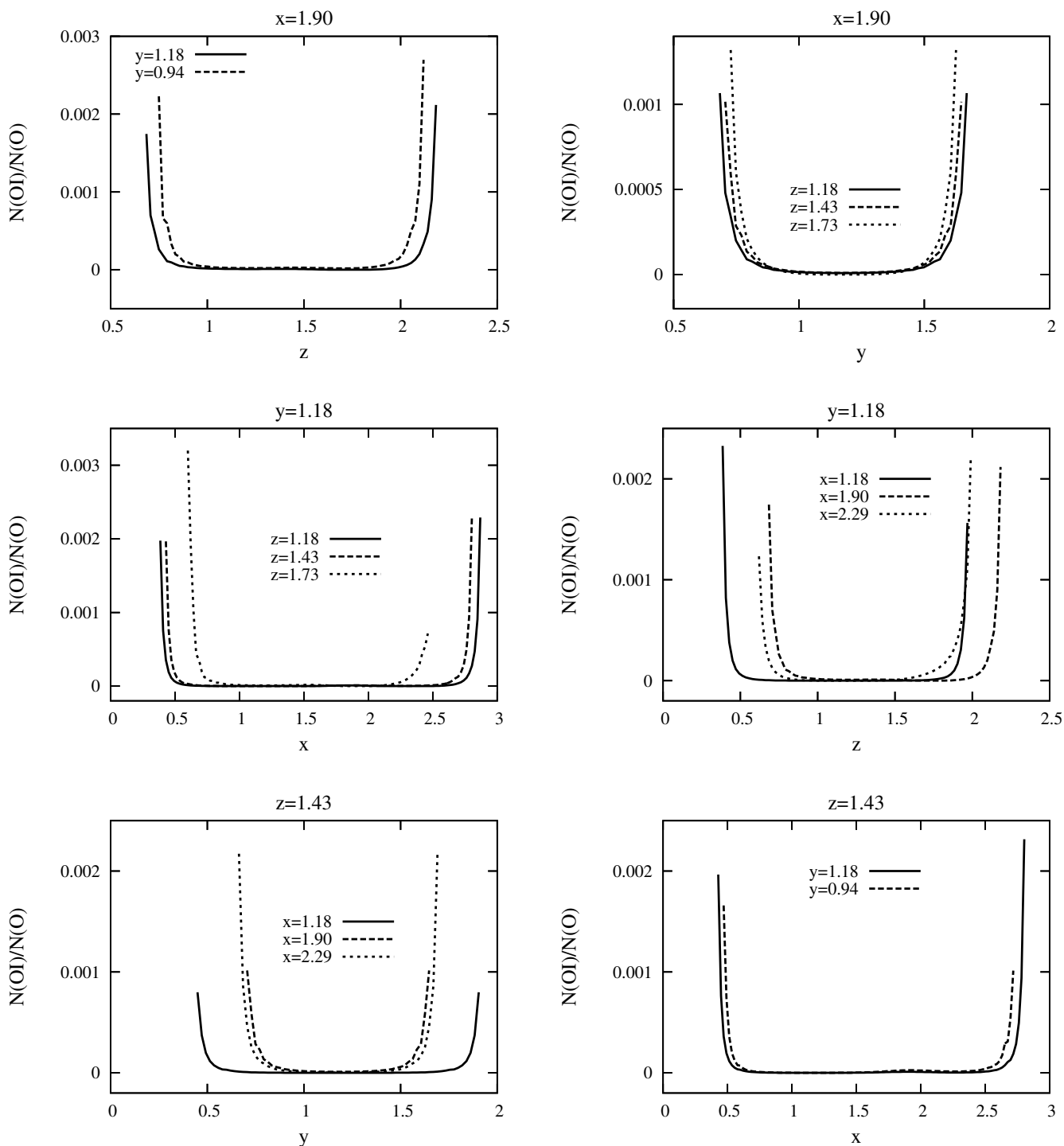


Figura 22. Fracción de ionización del OI en el modelo de tres estrellas excitatrices (tabla 8). Los ejes están dados en unidades del radio de Strömberg equivalente, R .

que gobiernan el equilibrio de ionización, el balance energético y el transporte radiativo de energía, y a la vez, se han estudiado las secciones eficaces de ionización así como los coeficientes de recombinación del H y del O . Para el balance energético se ha considerado que la ganancia de energía térmica se debe a la fotoionización del H y que la pérdida

se debe a la excitación colisional del O en sus distintos estados de ionización (se ha tomado hasta el tercer orden de ionización de este elemento). Para la excitación colisional, a fin de simplificar el modelo, se ha realizado una aproximación de dos niveles para cada átomo o ión del O , lo cual ha permitido la construcción de una función de enfriamiento

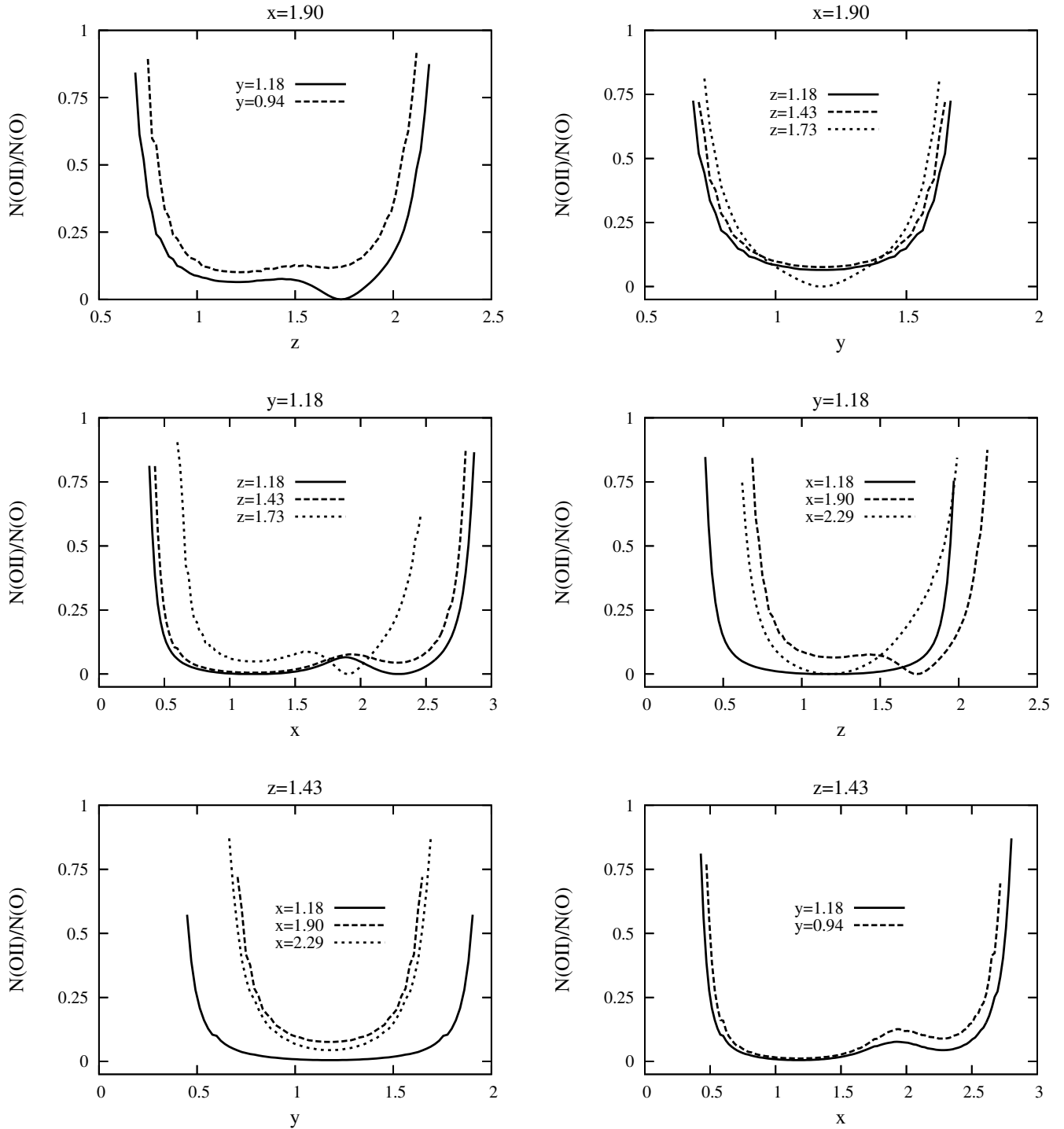


Figura 23. Fracción de ionización del *OII* en el modelo de tres estrellas excitatrices (tabla 8). Los ejes están dados en unidades del radio de Strömgen equivalente, R .

cómoda para ser tratada analíticamente. El problema del transporte radiativo ha sido resuelto sin considerar el campo de radiación difusa originado en la nebulosa, pero si se han tomado en cuenta los casos extremos de nebulosas ópticamente delgadas y ópticamente gruesas para la radiación difusa, elección que ha facilitado realizar la evaluación de las

integrales en frecuencia y por ende, la obtención de expresiones sencillas para las fuentes de electrones libres y de energía térmica de los mismos. En estas integrales se ha tomado el modelo de cuerpo negro para el espectro emergente de las estrellas excitatrices en el rango de temperaturas típico de las estrellas asociadas a las regiones HII, y el cálculo

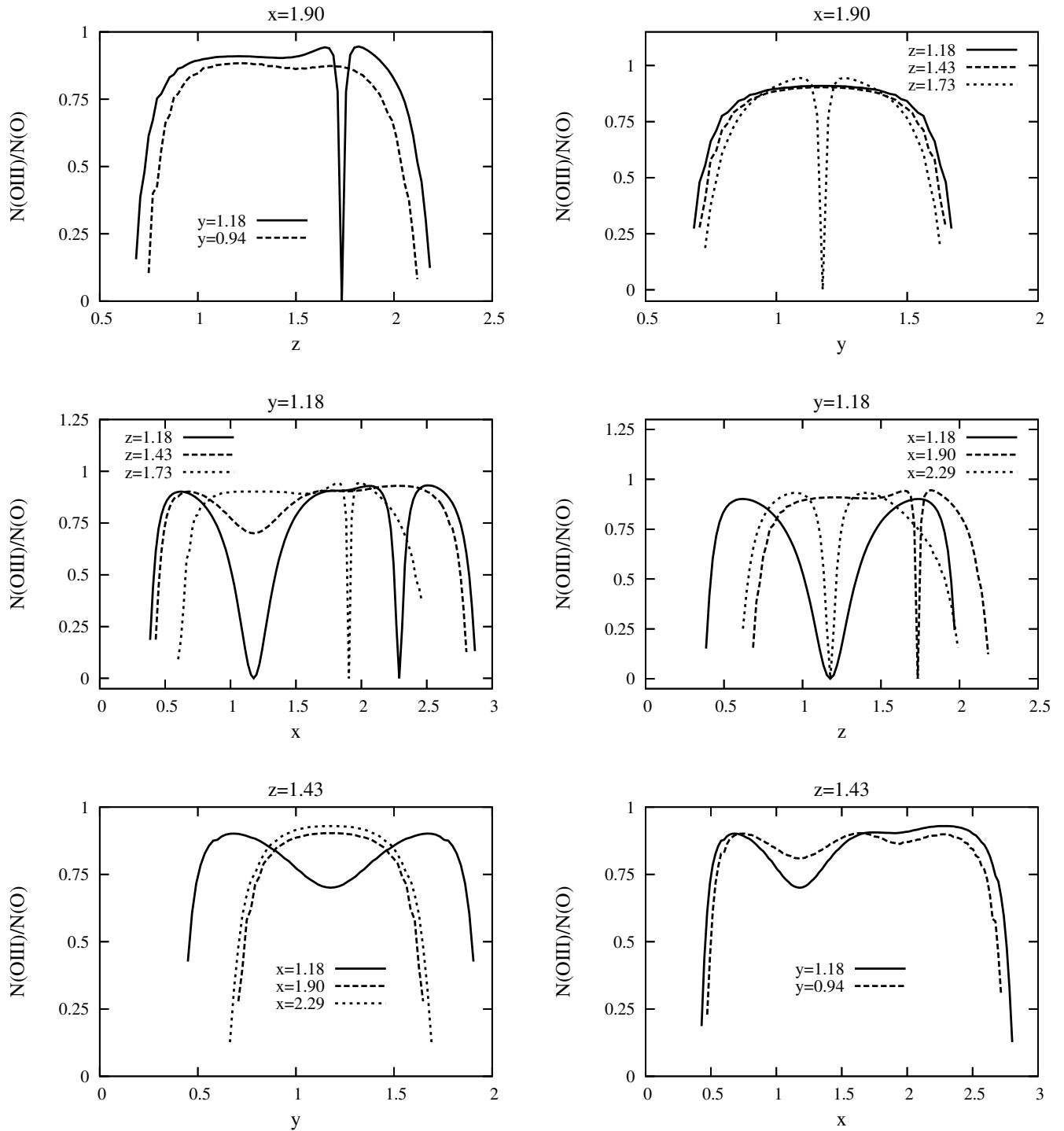


Figura 24. Fracción de ionización del $OIII$ en el modelo de tres estrellas excitatrices (tabla 8). Los ejes están dados en unidades del radio de Strömgen equivalente, R .

lo del espesor óptico ha sido realizado usando una red cartesiana de celdas donde en cada una de ellas todas las magnitudes físicas involucradas eran calculadas en un proceso iterativo hasta lograr la convergencia. Las magnitudes físicas relevantes obtenidas con este método han sido las fracciones de ionización del hidrógeno y del oxígeno en sus distin-

tos estados de ionización —es decir, las estructuras de ionización en una nebulosa— y la temperatura cinética, todas ellas como funciones de la posición.

Al comparar los resultados obtenidos con los que se muestran en las referencias [11,12] se encuentra un muy buen acuerdo, indicando que las principales aproximaciones realizadas en este tra-

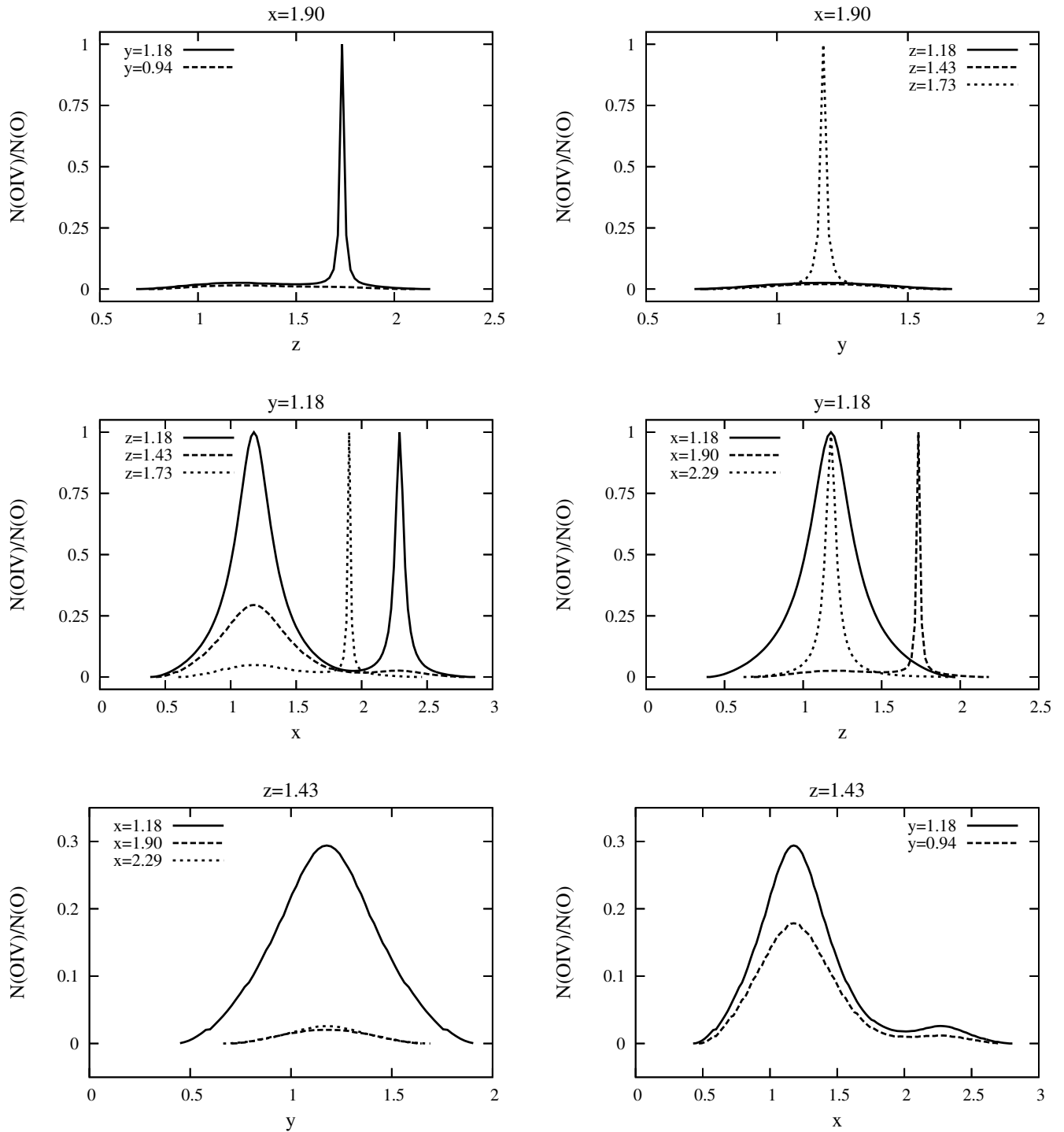


Figura 25. Fracción de ionización del *OIV* en el modelo de tres estrellas excitatrices (tabla 8). Los ejes están dados en unidades del radio de Strömgren equivalente, R .

bajo, a saber, el no considerar un campo de radiación difusa y el haber realizado una aproximación de dos niveles para los estados cuantificados de las partículas, podrían ser razonables para un estudio no tan detallado de nebulosas gaseosas. En lo que respecta a la precisión de los resultados, el método iterativo de cálculo de las magnitudes físicas en

un arreglo de celdas muestra ser muy eficiente, sobre todo en el cálculo del espesor óptico, que puede ser realizado de manera muy sencilla sumando las contribuciones al mismo de las distintas celdas a lo largo del camino hacia la estrella en cuestión. Es evidente, como lo muestran las pruebas realizadas, que la precisión es mayor si mayor es el número

de celdas considerado y ésto al margen del número de iteraciones realizado. Sin embargo, aun para relativamente bajos números de celdas, la precisión es muy buena en el interior de las regiones HII resultantes, presentándose los mayores errores en sus bordes, donde los espesores ópticos crecen abruptamente y los cambios significativos de las demás magnitudes también se dan en pequeñas escalas espaciales.

Cuando se aplica el modelo a una nebulosa con una estrella excitatriz, los resultados presentan los rasgos característicos encontrados en la literatura para estos sistemas [1,2,11,12]. En el caso del estudio de una nebulosa con más de una estrella excitatriz, que ha sido el objetivo principal en este trabajo, se ha aplicado el modelo a sistemas de dos y tres estrellas excitatrices, y las conclusiones que se han podido obtener acerca de la estructura de ionización y de la temperatura cinética son las siguientes: Las diferencias con el caso de una nebulosa con una sola estrella se dan principalmente en las regiones que comprenden las regiones de intersección de las esferas de Strömgen de las estrellas consideradas y las cercanas a ellas. En estas regiones, las fracciones de ionización y la temperatura cinética se presentan como funciones continuamente diferenciables de la posición, alcanzando máximos y mínimos locales. Fuera y suficientemente lejos de dichas regiones de intersección, el comportamiento de estas funciones es similar al que se tendría para una estrella si no estuviesen presentes las vecinas. La explicación de este resultado se lo encuentra en la superposición de los campos de radiación estelares, que da lugar a un mayor número de fotones capaces de lograr la ionización en la región de intersección mencionada y sus aledaños: fotones que en ausencia de otros

provenientes de estrellas vecinas tendrían su número atenuado por la absorción, pueden ahora viajar a mayores distancias debido a que el espesor óptico no alcanza valores suficientemente grandes por el sólo hecho de que el hidrógeno se mantiene casi completamente ionizado con ayuda de los fotones de las otras estrellas. Es entonces que la dilución geométrica de la radiación juega el papel importante en la atenuación, de otro modo la estructura en regiones suficientemente alejadas de la de intersección se vería afectada notoriamente, lo cual no ha sido observado en los resultados obtenidos.

REFERENCIAS

- [1] Osterbrock, D.E., "Astrophysics of Gaseous Nebulae" (1974).
- [2] Aller, L.H., "Physics of Thermal Gaseous Nebulae", D. Reidel Publishing Company (1987).
- [3] Spitzer L., "Physical Processes in the Interstellar Medium", Wiley, John & Sons, Incorporated (1978).
- [4] Seaton, M.J., Rev.Mod.Phys., 30, 979 (1958).
- [5] Burguess, A. & Seaton M.J., M.N.R.A.S., 120, 121 (1960).
- [6] Seaton M.J., M.N.R.A.S., 119, 81 (1959).
- [7] Hummer, D.G. & Seaton, M.J., M.N.R.A.S., 125, 437 (1963).
- [8] Mendoza, C., Simp. I.A.U. 103 (1982).
- [9] Aldrovandi, S.M.V. & Pequignot, D., Astr.Ap.25 No 1 (1973).
- [10] Simp. I.A.U., números 34,76.
- [11] Rubin, R.H., Ap.J., vol 153 (1968).
- [12] Stasinska, G., Astr.Ap., suppl. 32, 429 (1978).
- [13] Shu, F.H., "The Physics of Astrophysics, Vol I: Radiation", University Science Books (1982).
- [14] Press, W. H., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T., Flannery, B. P., "Numerical Recipes in FORTRAN", Second Edition, Cambridge University Press (1992).
- [15] Sobelman, I.I. "Atomic Spectra and Radiative Transitions", Springer Verlag (1979).