

# COMPORTAMIENTO SÍNCRONO DE OSCILADORES DE RELAJACIÓN IDÉNTICOS GLOBALMENTE ACOPLADOS POR PULSOS

G. M. Ramírez Ávila<sup>1</sup>, J.-L. Guisset<sup>2</sup> & J.-L. Deneubourg<sup>2</sup>

<sup>1</sup>*Instituto de Investigaciones Físicas  
Universidad Mayor de San Andrés  
Casilla 8635. La Paz, Bolivia*

<sup>2</sup>*Centre for Nonlinear Phenomena and Complex Systems  
Université Libre de Bruxelles  
CP231 Campus Plaine, Bld. du Triomphe 1050. Bruselas, Bélgica*

## RESUMEN

Se estudia la sincronización en conjuntos de tres tipos de osciladores de relajación globalmente acoplados por pulsos. El estudio está restringido al caso de osciladores idénticos y se consideran acoplamientos globales con la aproximación de campo medio y del tipo dependiente con la distancia entre osciladores. Las características de los osciladores son tales que se va desde una situación de osciladores fotocontrolados reales y simplificados descritos en [1][2] a osciladores idealizados de integración y disparo [3]. Para el estudio de la sincronización, se utilizan los criterios del período y de la diferencia de fases introducidos en [4][5]. Finalmente, se analizan y comparan las duraciones de los transientes para todos los casos estudiados así como su relación con la probabilidad de sincronización total.

*Descriptor:* Sincronización, Acoplamiento Global, Comportamientos Colectivos.

## 1. INTRODUCCIÓN

La sincronización en conjuntos de osciladores acoplados ha merecido la atención de muchos científicos sobre todo a partir del s. XX. A. Winfree publica en 1967 un artículo en el que hace un análisis de poblaciones de osciladores de relajación generalizados a los cuales los relaciona con ritmos biológicos [6]. En 1975, C. Peskin formula un modelo para el marcapasos cardiaco en base a osciladores inspirados en circuitos RC [7]. R. Mirollo y S. Strogatz publican en 1990 un artículo en el que introducen un modelo simplificado denominado oscilador de integración y disparo (integrate-and-fire oscillator) que se constituye en un paradigma de osciladores que se acoplan y sincronizan por medio de pulsos [3]; este modelo permitió la explicación de la sincronización en sistemas tales como luciérnagas, células cardíacas y neuronas entre otros. Numerosos trabajos han sido consagrados a estudiar acoplamientos globales entre diferentes tipos de osciladores. Así, se pueden citar investigaciones relacionadas con neuronas [8][9], con juntas de Josephson [10][11], con sistemas químicos [12][13] o simplemente con mapas [14][15][16] y osciladores en general [17][18][19]. En el presente artículo nos concentramos en tres tipos de osciladores que parecen tener una gran similitud entre si ya que todos son osciladores de relajación y su dinámica es tal que tienen un comportamiento pulsátil. Son justamente los pulsos que posibilitan el acoplamiento en ensambles de cada uno de estos tipos de osciladores. En este artículo, se estudia y caracteriza

el comportamiento síncrono en configuraciones de acoplamiento global con una aproximación de campo medio (Fig. 1(a)) y en la situación más real de una dependencia del acoplamiento con la distancia (Fig. 1(b))<sup>1</sup>. En § 2 se describen los osciladores y se contextualizan los mismos de manera que los resultados obtenidos puedan ser comparables. En § 3 se presentan los resultados relacionados con la sincronización total de los conjuntos de osciladores considerando los criterios de sincronización del período y de la diferencia de fases introducidos en [4][5] y considerando un acoplamiento con la aproximación de campo medio (§ 3.1.1) y otro del tipo dependiente con la distancia (§ 3.2.1). Asimismo, en § 3.1.2 y § 3.2.2 se comparan los transientes (intervalos de tiempo en los que se alcanza la sincronización estable de la población total de osciladores) para las situaciones de acoplamiento mencionadas anteriormente. Finalmente, en § 4 se discuten los resultados y se hace una crítica a los modelos simplificados que en algunas ocasiones pueden conducir a resultados no muy concordantes con la realidad; también se dan las perspectivas de esta investigación.

## 2. OSCILADORES DE RELAJACIÓN PULSÁTILES

Los osciladores de relajación fueron denominados así desde los trabajos pioneros de van der Pol en 1926. La característica esencial de estos osciladores es la de tener dos escalas de tiempo, en las que tienen lugar movimien-

<sup>1</sup>La Fig. 1 fue obtenida utilizando el programa especializado en diagramación de redes ©yEd Graph Editor.

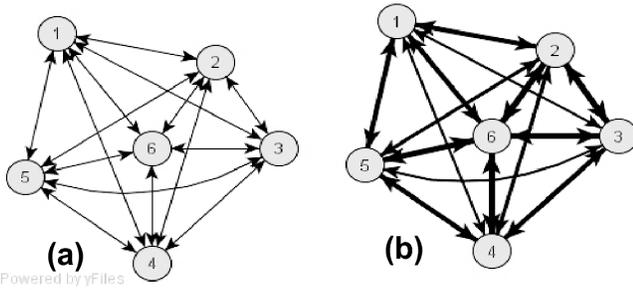


Figura 1. Configuraciones de osciladores globalmente acoplados. (a) Aproximación de campo medio. (b) Dependencia con la distancia entre los osciladores. Los sentidos y el grosor de las flechas indican la direccionalidad del acoplamiento (doble flecha significa acoplamiento mutuo) entre osciladores y la intensidad del acoplamiento respectivamente.

tos rápidos y lentos en el espacio de fases [20]. Por este motivo, la forma de la oscilación es muy lejana a una función senoidal y mas bien es parecida a una secuencia de pulsos [21] o a una onda de tipo diente de sierra [22]. Muchas investigaciones han sido dedicadas a los osciladores de relajación ya sea para describir ciertas propiedades de estos [23] o para aplicarlos en fenómenos biológicos que describen ritmos circadianos, respiración [24], comportamientos neuronales [25]; en sistemas químicos [26]; en circuitos electrónicos [27][28]; para el análisis de ritmos y compases musicales [29]; y principalmente para estudiar la sincronización en diferentes contextos [30][31][32]. En el presente trabajo, analizamos los osciladores fotocontrolados, para los cuales utilizamos la abreviación LCOs (proveniente de Light-Controlled Oscillators) [5] y los osciladores de integración y disparo cuya abreviatura es IFOs (de su nombre en inglés, Integrate-and-Fire Oscillators) [3].

### 2.1. Osciladores fotocontrolados (LCOs)

Estos osciladores fueron introducidos desde el punto de vista experimental en 2001 [28][33] y varios trabajos que analizan su comportamiento síncrono fueron realizados [1][34][2][4][35][5][36]. Los LCOs son osciladores de relajación que emiten pulsos luminosos durante la parte rápida de variación de voltaje, a través de los LEDs que poseen. Están provistos igualmente de fotosensores, lo que permite a los LCOs acoplarse por medio de los destellos que emiten y reciben. Considerando que el acoplamiento  $\beta_{ij}$  entre pares de LCOs  $i$  y  $j$  es simétrico ( $\beta_{ij} = \beta_{ji}$ ), que el término  $\delta_{ij} = 1$  cuando los LCOs pueden interactuar, y que la variable binaria  $\epsilon_i(t)$  es el estado del oscilador que toma el valor 1 (etapa de carga) ó 0 (etapa de descarga). Las ecuaciones que describen la dinámica de un conjunto de  $N$  LCOs son:

$$\frac{dV_i(t)}{dt} = \lambda_i[(V_{Mi} - V_i(t))\epsilon_i(t) - \gamma_i V_i(t)[1 - \epsilon_i(t)] + \sum_{j=1}^N \beta_{ij} \delta_{ij} [1 - \epsilon_j(t)], \quad i \neq j, \quad (1)$$

donde  $V_{Mi}$  es el voltaje de la fuente para cada oscilador  $i$  y gracias a un chip basculante LM555 (flip-flop) trabajando en modo astable, se establecen umbrales superior (para  $2V_{Mi}/3$ ) e inferior (para  $V_{Mi}/3$ ), lo que permite la oscilación. Dado que se tienen dos circuitos RC que permiten la carga y la descarga, los coeficientes  $\lambda_i$  y  $\gamma_i$  están en función de los valores de las resistencias  $R_{\lambda i}$ ,  $R_{\gamma i}$  y del condensador  $C_i$  de la forma:

$$\lambda_i = \frac{1}{(R_{\lambda i} + R_{\gamma i})C_i} \quad ; \quad \gamma_i = \frac{1}{R_{\gamma i}C_i} \quad (2)$$

Por otra parte, para un LCO que no recibe la acción de otros, su período natural [34] viene dado por:

$$T_{0i} = (R_{\lambda i} + 2R_{\gamma i})C_i \ln 2. \quad (3)$$

### 2.2. Osciladores de integración y disparo (IFOs)

Como se mencionó anteriormente, estos osciladores fueron introducidos por Peskin en 1975 para tratar de modelizar marcapasos cardíacos [7] y en 1990, Mirollo y Strogatz simplifican el modelo y lo hacen fácilmente tratable, definiendo un umbral superior ( $V_i = 1$ ) hasta el cual ocurre el proceso de carga (“integración”) y una vez que se ha alcanzado éste, el IFO se descarga (“disparo”) instantáneamente hasta la línea de base ( $V_i = 0$ ) [3]. Las ecuaciones que describen los IFOs en su formas más prístina tienen la forma:

$$\frac{dV_i}{dt} = I_i - \eta_i V_i, \quad 0 \leq V_i \leq 1, \quad i = 1, \dots, N. \quad (4)$$

Los IFOs se acoplan por medio de pulsos y cuando un IFO dispara, todas las otras variables  $V_j$ ,  $j \neq i$ , se incrementan una cantidad  $\beta/N$ . Se hace la división por  $N$ , para tener un comportamiento razonable en el límite termodinámico  $N \rightarrow \infty$ . Es decir,

$$\text{Si } V_i(t) = 1 \implies V_j(t^+) = \min\left(1, V_j(t) + \frac{\beta}{N}\right), \quad \forall j \neq i. \quad (5)$$

Una integración sencilla de (4) para un IFO, permite hallar su período natural:

$$T_{0i} = \frac{1}{\eta_i} \ln \frac{I_i}{I_i - \eta_i}. \quad (6)$$

Nótese que en la formulación de las ecuaciones (4) y (5), se ha supuesto implícitamente un acoplamiento global de los IFOs, sin que las distancias entre los mismos jueguen algún rol; es decir, todos los IFOs están acoplados a los demás, con un mismo valor de acoplamiento, esto es lo que denominaremos “aproximación de campo medio”. Una primera modificación que se puede hacer a (5) para que se tenga en cuenta acoplamientos que no son los mismos entre pares de IFOs es el considerar

$$\text{Si } V_i(t) = 1 \implies V_j(t^+) = \min\left(1, V_j(t) + \sum_{i=1}^N \beta_{ij} \delta_{ij}\right), \quad \forall j \neq i. \quad (7)$$

Aquí,  $\beta_{ij}$  y  $\delta_{ij}$  tienen el mismo significado que en el caso de los LCOs. Como se pretende hacer una comparación de los LCOs e IFOs, expresaremos las ecuaciones que describen a los IFOs y sus acoplamientos en términos de las mismas variables que los LCOs, lo que da:

$$\frac{dV_i(t)}{dt} = \lambda'_i[(V_{Mi} - V_i(t))], \quad i = 1, \dots, N, \quad (8)$$

con

$$\lambda'_i = \frac{1}{(R\lambda_i + 2R_{\gamma i})C_i} = \frac{\lambda_i}{1 + R_{\gamma i}C_i\lambda_i}, \quad (9)$$

siendo el intervalo de variación del voltaje  $\frac{V_{Mi}}{3} \leq V_i \leq \frac{2V_{Mi}}{3}$ . Además, cuando existe acoplamiento entre IFOs, se tendrá:

$$\begin{aligned} \text{Si } V_j(t) = \frac{2V_{Mj}}{3} &\implies \\ V_i(t^+) = \min \left( \frac{2V_{Mi}}{3}, V_i(t) + \sum_{j=1}^N \beta_{ij}\delta_{ij} \right), &\quad \forall i \neq j. \end{aligned} \quad (10)$$

Utilizando (8), se puede calcular el período natural de un IFO de este tipo que coincide con (3), es decir, el de un LCO. Con lo anterior, se pueden comparar los resultados a obtenerse con LCOs e IFOs.

### 3. SINCRONIZACIÓN TOTAL EN LCOS E IFOS

Para nuestros fines, el término sincronización total, se refiere a la situación en la que todos los osciladores de una determinada población llegan a sincronizarse de forma estable. Para el análisis, utilizaremos la probabilidad de sincronización total (*PST*) para cada población de osciladores. La *PST* está en relación al porcentaje de experimentos numéricos en los cuales se alcanza la sincronización total. Para el análisis, se utilizan dos criterios de sincronización cuyos detalles están especificados en [4][5]: el criterio del período (CP) y el criterio de la diferencia de fases (CDF). El CP solamente exige que los períodos de todos los osciladores de un determinado ensamble tengan el mismo período para poder referirnos a la sincronización total, en tanto que el CDF, además de la igualdad de períodos, exige que las diferencias de fase entre los osciladores sea prácticamente nula; es decir, que los osciladores emitan sus pulsos casi simultáneamente. Además, tomamos poblaciones que van de 2 a 25 osciladores idénticos, para las cuales hacemos experimentos numéricos considerando acoplamientos con una aproximación de campo medio y acoplamientos que dependen de la distancia entre los osciladores según la relación expuesta en [34]. Los tipos de osciladores con los cuales trabajamos son: LCOs, LCOs simplificados (considerando que el tiempo de descarga es constante) e IFOs.

#### 3.1. Aproximación de campo medio

En este caso, se considera que todos los osciladores están acoplados de la misma manera y con una intensidad de acoplamiento común para todos  $\frac{\beta_{\text{ref}}}{N}$  y como el acoplamiento es global,  $\delta_{ij} = 1$ . Por otra parte, como se

consideran osciladores idénticos, las cantidades  $\lambda$ ,  $\gamma$  y  $V_M$  son iguales para todos los osciladores y como se tienen  $N$  osciladores, los índices en las ecuaciones  $i, j = 1, \dots, N$  deben ser diferentes  $i \neq j$ . Las ecuaciones para cada uno de los tipos de osciladores con los cuales trabajamos son:

**LCOs.** Las ecuaciones que describen el acoplamiento global entre  $N$  LCOs vienen dadas por:

$$\begin{aligned} \frac{dV_i(t)}{dt} = \lambda(V_M - V_i(t))\epsilon_i(t) - \gamma V_i(t)[1 - \epsilon_i(t)] \\ + \frac{\beta_{\text{ref}}}{N} \left[ N - 1 - \sum_{j=1}^N \epsilon_j(t) \right], \end{aligned} \quad (11)$$

donde se hace el cociente entre  $N$  con el fin de tener un comportamiento razonable en el límite termodinámico ( $N \rightarrow \infty$ ).

**LCOs simplificados.** En este caso, se considera que la descarga no se modifica y consecuentemente, el tiempo de descarga será también constante ( $t_\gamma = R_\gamma C \ln 2$ ). Las ecuaciones que describen el acoplamiento global de este tipo de osciladores son:

$$\begin{aligned} \frac{dV_i(t)}{dt} = \lambda(V_M - V_i(t))\epsilon_i(t) \\ + \left\{ \frac{\beta_{\text{ref}}}{N} \left[ N - 1 - \sum_{j=1}^N \epsilon_j(t) \right] \right\} \epsilon_i(t) - \gamma V_i(t)[1 - \epsilon_i(t)] \end{aligned} \quad (12)$$

**IFOs.** Para el acoplamiento global de estos osciladores considerando una aproximación de campo medio se tiene:

$$\frac{dV_i(t)}{dt} = \lambda'(V_M - V_i(t)), \quad (13)$$

con la condición que

$$\begin{aligned} \text{Si } V_j(t) = \frac{2V_{Mj}}{3} \\ \implies V_i(t^+) = \min \left( \frac{2V_{Mi}}{3}, V_i(t) + \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \beta_{ij} \right), \\ \forall i \neq j. \end{aligned} \quad (14)$$

Aquí se debe aclarar que el acoplamiento entre IFOs tiene que ser mayor que el acoplamiento  $\beta_{\text{ref}}$  que se ha utilizado para los LCOs en un factor  $t_\gamma = R_\gamma C \ln 2$  que es el tiempo de descarga de un LCO; es decir, el tiempo durante el cual actúa un LCO sobre otro. Así, se tendrá:

$$\begin{aligned} \beta_{ij} = \beta_{\text{ref}} t_\gamma = \beta_{\text{ref}} R_\gamma C \ln 2, \quad \forall i, j \\ \text{y además, } i \neq j. \end{aligned} \quad (15)$$

Los valores utilizados para los parámetros son:  $V_M = 9,0$  V,  $R_\lambda = 100,0$  k $\Omega$ ,  $R_\gamma = 1,6$  k $\Omega$  y  $C = 0,47$   $\mu$ F.

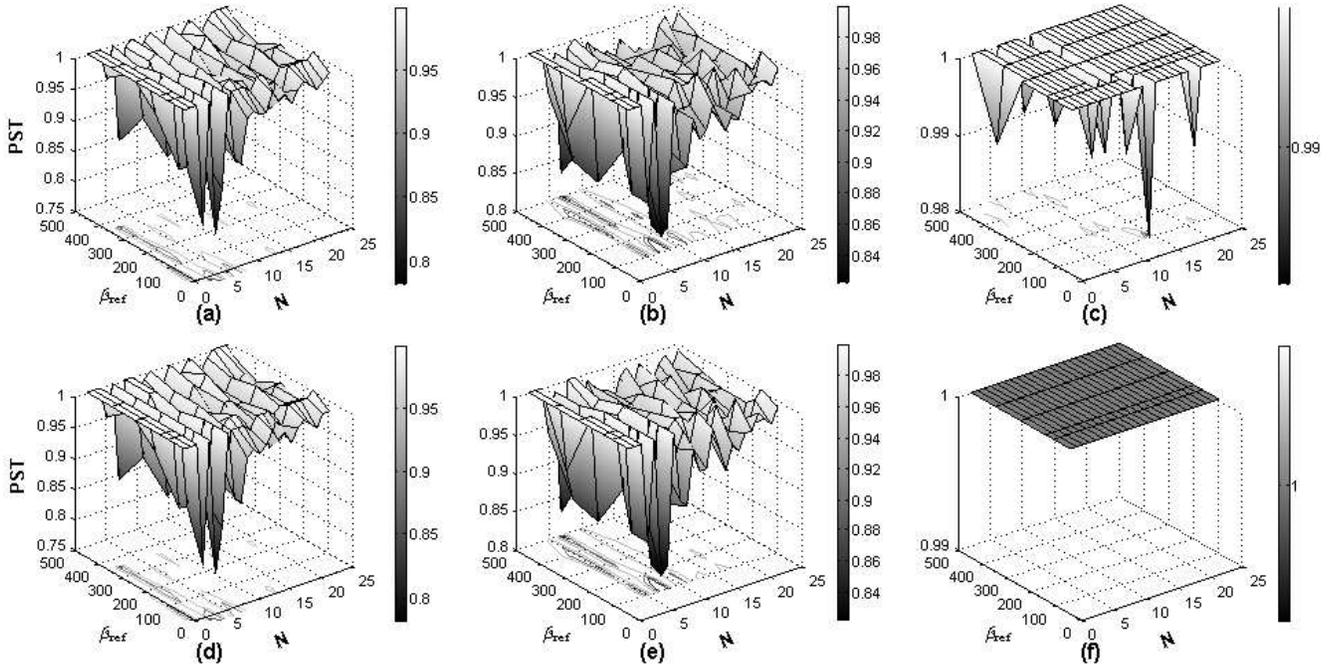


Figura 2.  $PST$  en función de  $\beta_{\text{ref}}$  y  $N$  para LCOs (a) y (d), para LCOs simplificados (b) y (e), y para IFOs (c) y (f); utilizando el CDF (a)–(c) y el CP (d)–(f).

### 3.1.1. Probabilidad de sincronización total ( $PST$ )

Para el estudio de la  $PST$  en la aproximación de campo medio, se consideraron los tres tipos de osciladores y se hicieron 100 experimentos numéricos para números de osciladores ( $N$ ) variando de 2 a 25 y valores de la intensidad de acoplamiento ( $\beta_{\text{ref}}$ ) de 100, 166, 200, 300, 400 y 500. Así mismo, para la caracterización de la  $PST$ , se consideraron los criterios de sincronización de la diferencia de fase (CDF) y del período (CP). Los resultados de los experimentos numéricos se muestran en la Fig. 2

De las Fig. 2(a) y (d), se observa que el comportamiento es muy similar, presentándose sólo pequeñas diferencias y en general, la  $PST$  para el caso del CP es ligeramente mayor en comparación a la correspondiente al CDF. Una situación parecida ocurre cuando se comparan las Fig. 2(b) y (e). Para Estas 4 situaciones, el comportamiento general de la  $PST$  es el de aumentar con  $N$  y  $\beta_{\text{ref}}$ , aunque para los LCOs, este aumento parece ser más uniforme que en el caso de los LCOs simplificados, en los cuales se nota una especie de oscilación en el aumento de la  $PST$  con  $N$ , lo que sugiere que el aumento en la  $PST$  varía dependiendo de la paridad o no en  $N$ . Sin importar  $N$ , los valores de la  $PST$  son grandes, siendo siempre mayores que 0.75 en el caso de los LCOs y mayores a 0.80 en el caso de los LCOs simplificados. Por otra parte, en el caso de los IFOs, se tiene que siempre existe sincronización si se considera el CP (ver Fig. 2(f)), en tanto que considerando el CDF (Fig. 2(c)), la  $PST$  es siempre mayor o igual a 0.98, debiéndose esta pequeña diferencia a situaciones en las cuales puede darse anti-sincronización o la formación de cúmulos de

sincronización que tienen la misma frecuencia pero que “disparan” a tiempos diferentes. Para cuantificar el valor medio de la  $PST$  para cada tipo de oscilador, se toman en cuenta las  $PST$  en función de  $N$  y de  $\beta_{\text{ref}}$  como en [5]; así, la expresión para el valor medio de la  $PST$  viene dado por:

$$\langle PST \rangle = \frac{1}{N_{\text{max}} - N_{\text{min}} + 1} \frac{\langle \Delta \beta_{\text{ref}} \rangle}{\beta_{\text{ref}}^{\text{max}} - \beta_{\text{ref}}^{\text{min}}} \times \sum_{i=N_{\text{min}}}^{N_{\text{max}}} \sum_{j=\beta_{\text{ref}}^{\text{min}}/(\Delta \beta_{\text{ref}})_{\text{max}}}^{\beta_{\text{ref}}^{\text{max}}/(\Delta \beta_{\text{ref}})_{\text{max}}+1} PST_{ij}, \quad (16)$$

donde, en nuestro caso,  $N_{\text{max}} = 25$ ,  $N_{\text{min}} = 2$ ,  $\beta_{\text{ref}}^{\text{max}} = 500$ ,  $\beta_{\text{ref}}^{\text{min}} = 100$ , y como se especificó anteriormente,  $(\Delta \beta_{\text{ref}})_{\text{max}} = 100$  y  $\langle \Delta \beta_{\text{ref}} \rangle = 66,667$ . Considerando que la desviación estándar  $\sigma_i$ ,  $i = N_{\text{min}} \dots N_{\text{max}}$ , constituye la incertidumbre cuando se calcula el valor medio de la  $PST$  para cada configuración con un número de LCOs dado. En consecuencia, se puede estimar la incertidumbre total para la  $PST$  (para todo  $N$  y para todo  $\beta_{\text{ref}}$ ), utilizando:

$$E_{PST} = \sqrt{\sum_{i=N_{\text{min}}}^{N_{\text{max}}} \sigma_i^2}. \quad (17)$$

Los valores y sus respectivas incertidumbres se muestran en la Tab. 1.

De los resultados obtenidos en la Tab. 1, se ve que la  $PST$  para LCOs simplificados es ligeramente menor que la correspondiente a los LCOs reales como resultado de las oscilaciones que presenta la  $PST$  en el caso de los

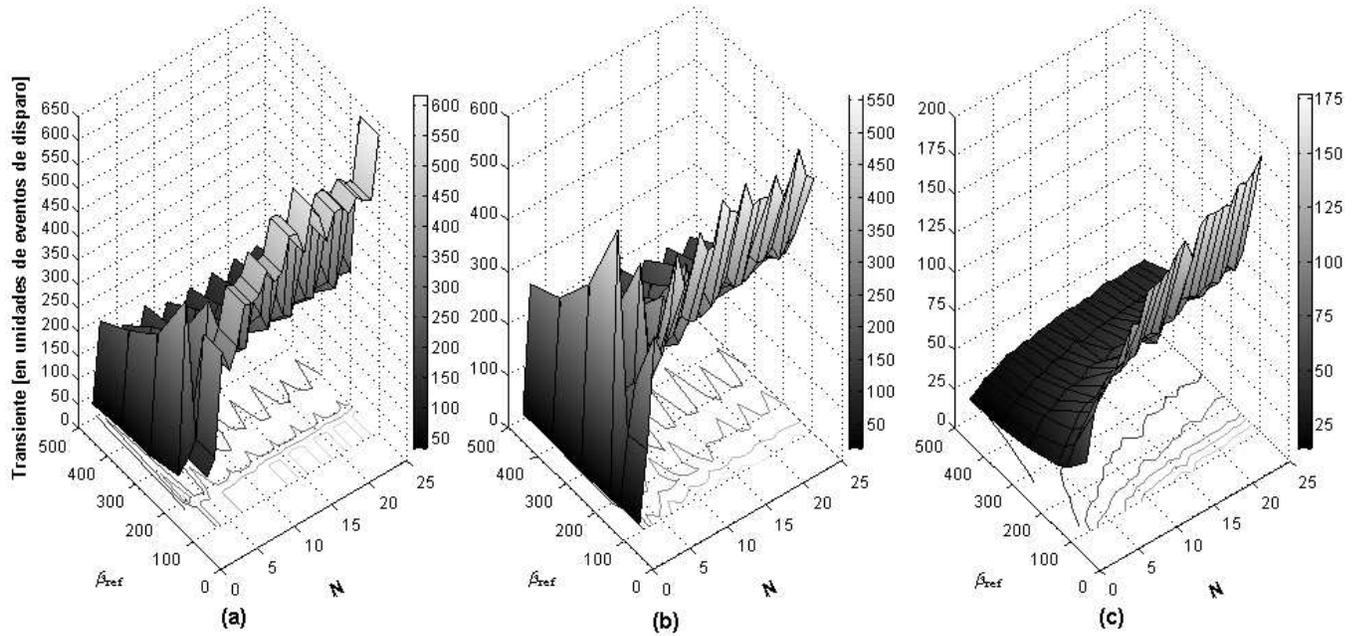


Figura 3. Transiente en función de  $\beta_{\text{ref}}$  y  $N$  para (a) LCOs, (b) LCOs simplificados, y (c) IFOs utilizando el CDF.

TABLA 1

Valores promedio e incertidumbres de las  $PST$ , utilizando todos los valores de  $N$  y  $\beta_{\text{ref}}$  para los tres tipos de osciladores globalmente acoplados utilizando la aproximación de campo medio y tomando como criterio de sincronización la constancia y limitación de las diferencias de fase y la igualdad de períodos respectivamente.

Tipo de oscilador	Criterio de sincronización	
	Diferencia de fase	Período
LCOs	$0,9669 \pm 0,0183$	$0,9681 \pm 0,0185$
LCOs simplificados	$0,9615 \pm 0,0177$	$0,9659 \pm 0,0180$
IFOs	$0,9963 \pm 0,0002$	1,0000

LCOs simplificados. Como un último comentario, destacar que los resultados obtenidos para los IFOs muestran coherencia con otros trabajos en los cuales se utilizan este tipo de osciladores [3][17][31], en el sentido en que la sincronización total es la situación más probable.

### 3.1.2. Transientes

Un aspecto interesante en la sincronización de osciladores acoplados es el estudio del transiente o el tiempo en el cual el sistema llega a la sincronización total. Los transientes para LCOs idénticos y acoplados localmente, se describieron en [5], en tanto que para IFOs localmente acoplados, estos transientes fueron estudiados en [31]. La formulación analítica para la descripción de transientes tanto para osciladores como para mapas acoplados es un problema aún abierto y sólo en algunos casos se han llegado a encontrar fórmulas explícitas para estos tran-

sientes como en el caso de bucles digitales con enganche de fase [37]; por lo que, se privilegia el cálculo numérico [38] o los resultados experimentales [27].

En la Fig. 3 se representan los transientes en unidades de eventos de disparo (eventos de encendido) para los tres tipos de osciladores considerados en función de  $N$  y  $\beta_{\text{ref}}$ , notándose que para todos los casos, la duración del transiente aumenta con  $N$  pero disminuye con  $\beta_{\text{ref}}$ , lo cual se podía intuir a partir de otros trabajos, tales como [31][5]. Sin embargo, se debe destacar que en el caso de los LCOs (reales y simplificados), la duración del transiente aumenta con  $N$  pero de forma oscilatoria, viéndose nuevamente una relación con la paridad en el número de osciladores que componen el sistema (Fig. 3(a),(b)). La situación es diferente en los IFOs, ya que el aumento en la duración del transiente con  $N$  es prácticamente continua y con una tendencia de tipo lo-

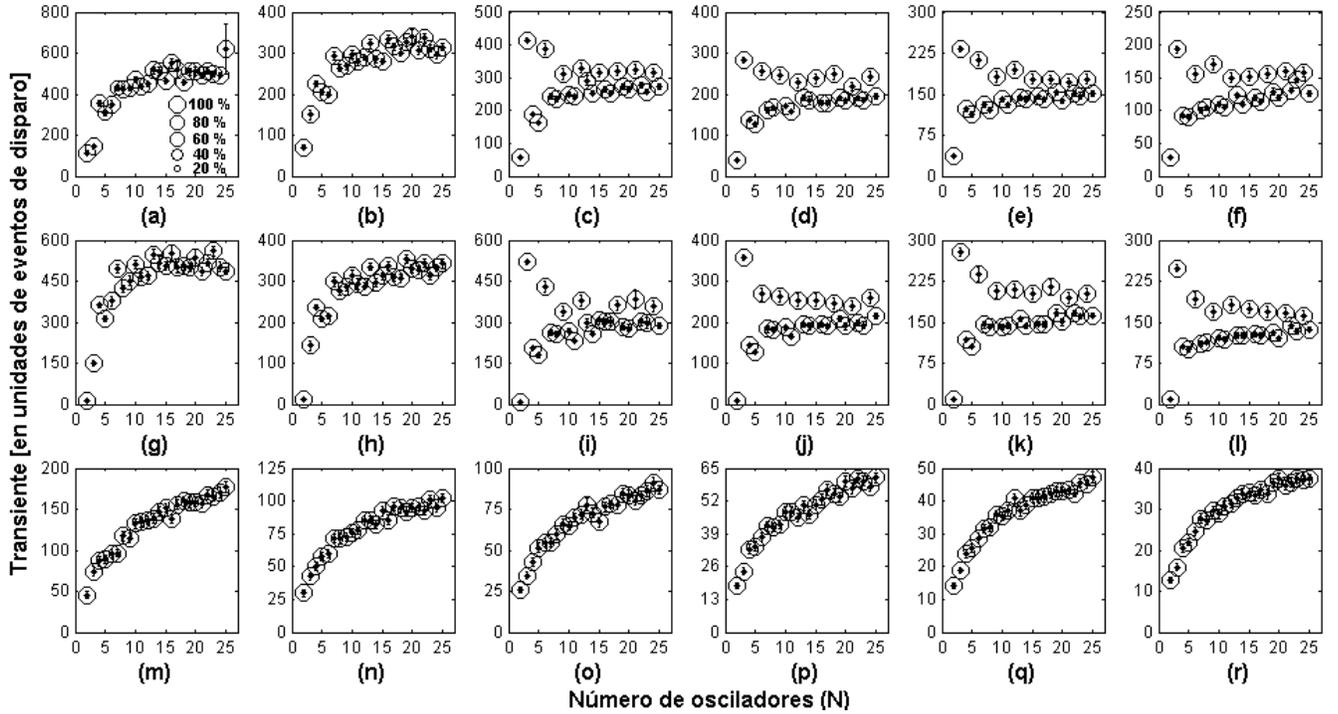


Figura 4. Transiente en función de  $N$  para (a)–(f) LCOs, (g)–(l) LCOs simplificados, y (m)–(r) IFOs utilizando el CDF. Se trabajaron con seis valores para  $\beta_{\text{ref}}$ : (a), (g), (m)  $\beta_{\text{ref}} = 100$ , (b), (h), (n)  $\beta_{\text{ref}} = 166$ , (c), (i), (o)  $\beta_{\text{ref}} = 200$ , (d), (j), (p)  $\beta_{\text{ref}} = 300$ , (e), (k), (q)  $\beta_{\text{ref}} = 400$  y (f), (l), (r)  $\beta_{\text{ref}} = 500$ .

garítmica de la forma  $t_s = a \ln(N - 1) + b$ , como se ve en la Fig. 3(c). Las tendencias citadas anteriormente se corroboran de forma más clara en la Fig. 4, en la cual se nota que para los LCOs y para valores de  $\beta_{\text{ref}}$  pequeños (acoplamiento débil), se hace evidente el ajuste a una función logarítmica de la duración del transiente en función de  $N$  (Fig. 4(a),(b),(g) y (h))

Por otra parte, la duración del transiente en todos los casos parece disminuir según una ley de potencias con  $\beta_{\text{ref}}$  de la forma

$$\langle t_s \rangle = a\beta_{\text{ref}}^{-b} + c,$$

situación que se muestra evidente en la Fig. 5.

### 3.2. Acoplamiento dependiente de la distancia

Se estudió también el caso en el cual el acoplamiento depende de la distancia entre los osciladores. Dado que se trata de un acoplamiento global entre los osciladores, para la investigación numérica, se planteó una “arena cuadrada” de  $50 \times 50$  celdas cuadradas, haciendo un total de 2500 celdas, cada una de las cuales puede ser ocupada por un oscilador. En el caso de los LCOs reales, se determinó experimentalmente que el acoplamiento ( $\beta$ ) varía con la distancia ( $r$ ) entre los osciladores de acuerdo con  $\beta_{ij} \propto \frac{1}{r_{ij}^\alpha}$ , donde se encontró que el exponente  $\alpha$  toma el valor de 2.11 [1]. Se supondrá que esta dependencia es válida también para LCOs simplificados e IFOs. Las ecuaciones que gobiernan el comportamiento de cada uno de los sistemas de osciladores globalmente acoplados son:

**LCOs.**

$$\begin{aligned} \frac{dV_i(t)}{dt} = & \lambda(V_M - V_i(t))\epsilon_i(t) - \gamma V_i(t)[1 - \epsilon_i(t)] \\ & + \beta_{\text{ref}} \sum_{j=1}^N [1 - \epsilon_j(t)] \left( \frac{r_{\text{ref}}}{r_{ij}} \right)^\alpha \delta_{ij}, \end{aligned} \quad (18)$$

**LCOs simplificados.**

$$\begin{aligned} \frac{dV_i(t)}{dt} = & \lambda(V_M - V_i(t))\epsilon_i(t) \\ & + \left[ \beta_{\text{ref}} \sum_{j=1}^N [1 - \epsilon_j(t)] \left( \frac{r_{\text{ref}}}{r_{ij}} \right)^\alpha \delta_{ij} \right] \epsilon_i(t) \\ & - \gamma V_i(t)[1 - \epsilon_i(t)]. \end{aligned} \quad (19)$$

**IFOs.**

$$\frac{dV_i(t)}{dt} = \lambda'[(V_M - V_i(t))], \quad (20)$$

con la condición que

$$\text{Si } V_j(t) = \frac{2V_M}{3} \implies$$

$$\begin{aligned} V_i(t^+) = & \min \left( \frac{2V_M}{3}, V_i(t) + \beta_{\text{ref}} \sum_{j=1}^N \left( \frac{r_{\text{ref}}}{r_{ij}} \right)^\alpha \delta_{ij} \right), \\ & \forall i \neq j. \end{aligned} \quad (21)$$

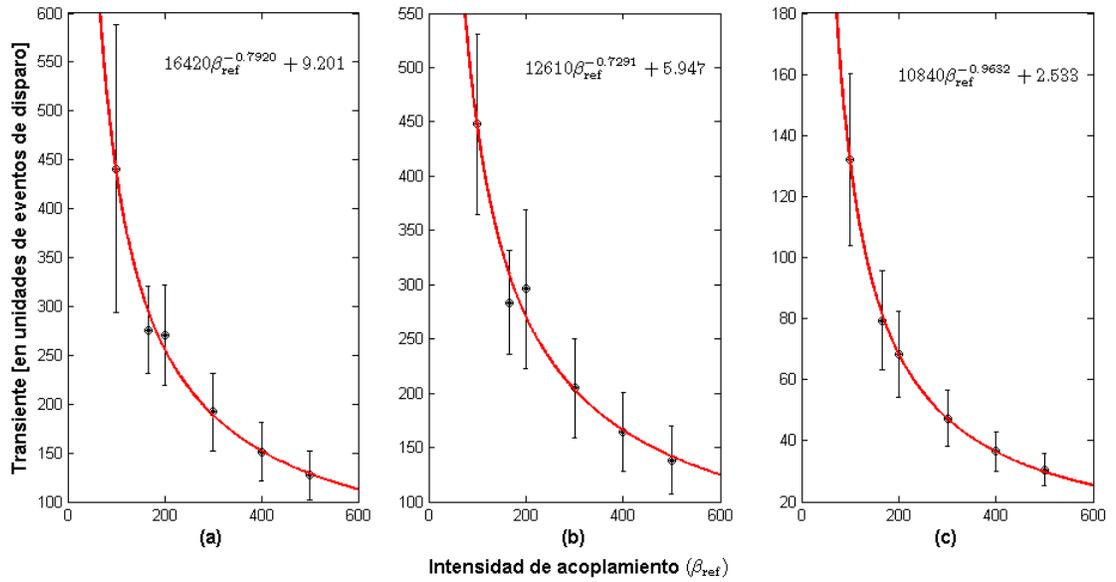


Figura 5. Transiente en función de  $\beta_{\text{ref}}$  para (a) LCOs, (b) LCOs simplificados, y (c) IFOs utilizando el CDF. La ecuación de ajuste se muestra para cada caso y la gráfica de la función correspondiente está representada por la línea continua.

Donde en todos los casos  $i, j = 1, \dots, N$  está en relación con el número de osciladores,  $\beta_{\text{ref}} = 166$  es una intensidad de acoplamiento de referencia y  $r_{\text{ref}} = 4,85$  [cm] es una distancia de referencia que justamente corresponde al valor de intensidad de acoplamiento dado por  $\beta_{\text{ref}}$ ; lo anterior fue obtenido a partir de resultados experimentales [34]. Por otra parte, se consideró también que la mínima distancia entre los osciladores debe ser de 1.8 cm, por lo que la distancia entre dos osciladores  $i, j$  se determina usando la relación:

$$r_{ij} = 1,8 \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} \quad [\text{cm}].$$

Al igual que en el caso del estudio de la aproximación de campo medio § 3.1, para cada uno de los tipos de oscilador se realizaron 100 experimentos numéricos con condiciones iniciales aleatorias y posiciones también aleatorias. Nuevamente, el número de osciladores considerados se varió entre 2 y 25 y se tomaron los criterios de sincronización que se mencionaron al principio de esta sección. Los valores intrínsecos de los osciladores son los mismos que se utilizaron en § 3.1, lo que corresponde a un período natural de los mismos de  $T_0 = 33,62$  ms. Se consideraron también hasta 15000 eventos de disparo.

### 3.2.1. Probabilidad de sincronización total

Para el cálculo de la  $PST$ , se consideraron los tres tipos de osciladores y los criterios de sincronización utilizados anteriormente. Los resultados se muestran en la Fig. 6, de la cual se observa que la tendencia de la  $PST$  es a disminuir exponencialmente con  $N$ , en la forma:

$$PST(N) = PST(2)e^{-k(N-2)}, \quad (22)$$

siendo  $PST(2)$  la probabilidad de sincronización total cuando el sistema está compuesto por 2 osciladores y

$k$ , una constante que depende del tipo de oscilador y del criterio de sincronización que se tome. De la Fig. 6 se observa que la  $PST$  es ligeramente mayor cuando se utiliza el CP que cuando se usa el CDF; esto no es sorprendente puesto que puede ser que toda la población de osciladores tenga el mismo período pero sus eventos de encendido difieran por valores constantes y de esa manera se puedan formar grupos de osciladores que no se enciendan al mismo tiempo. Para los LCOs simplificados, en el caso de la utilización del CP, se tiene una  $PST$  unitaria para grupos de 2 y 3 osciladores (Fig. 6(e)). Otro aspecto interesante a remarcar es el hecho que para los IFOs, cuando sus acoplamientos dependen de la distancia, su  $PST$  es nula para poblaciones mayores a 10 osciladores, situación sorprendente si se recuerda que los IFOs acoplados según una aproximación de campo medio, llegaban a sincronizarse de forma rápida y con una  $PST$  unitaria. Las afirmaciones anteriores pueden ser corroboradas viendo el valor que da el ajuste para el coeficiente  $k$ ; así como la bondad del ajuste a través del coeficiente de correlación  $r^2$  que son mostrados en la Tab. 2. Los valores de  $k$  muestran que para LCOs reales y simplificados, se tiene un decrecimiento más suave cuando se considera el CP; en tanto que para IFOs, con ambos criterios de sincronización se tiene un decrecimiento abrupto.

### 3.2.2. Transientes

Para los osciladores acoplados globalmente con una dependencia en la distancia, se obtuvieron también resultados considerando el CDF para la sincronización. Estos resultados se muestran en la Fig. 7. Se observa que los transientes no tienen un comportamiento regular y por lo tanto resulta difícil el tratar de ajustar una función que relacione transientes con número de osciladores. Para los casos de LCOs y LCOs simplificados, se tienen prome-

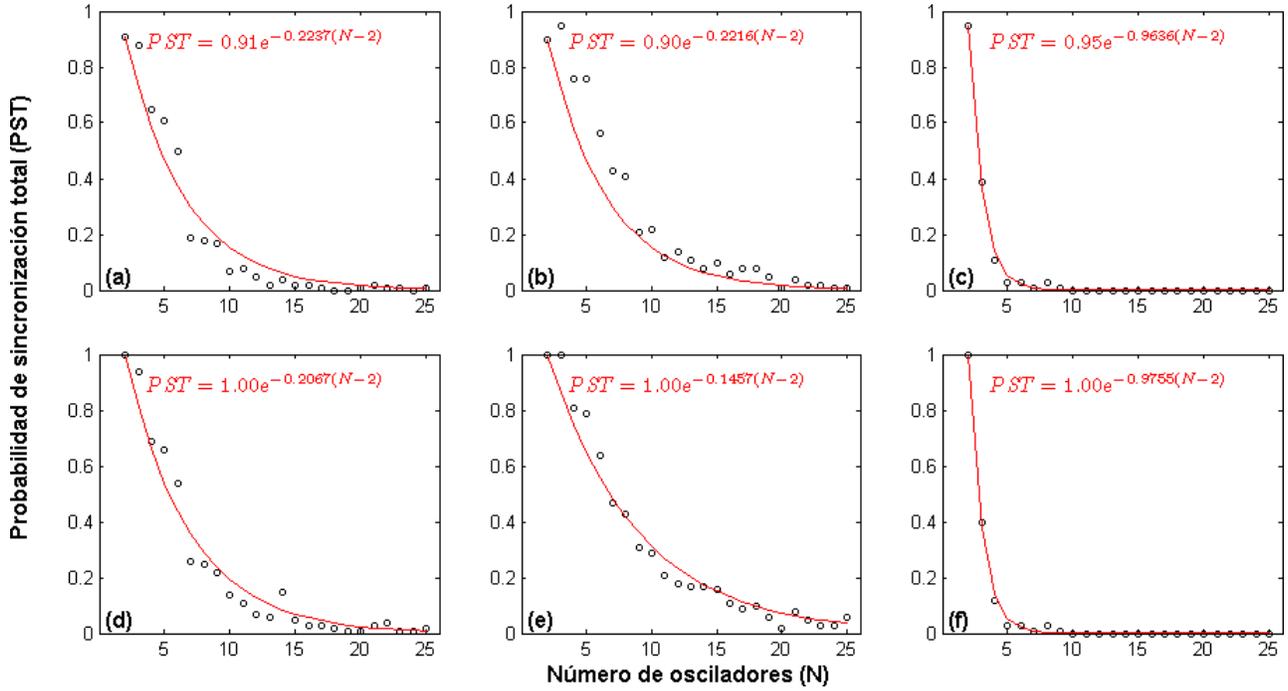


Figura 6. Resultados de la  $PST$  utilizando el CDF (arriba) y el CP (abajo) para LCOs (a) y (d), LCOs simplificados (b) y (e) e IFOs (c) y (f). La ecuación de ajuste se muestra para cada caso y la gráfica de la función correspondiente está representada por la línea continua.

TABLA 2

Valores promedio e incertidumbres del coeficiente  $k$  de (22) y coeficiente de correlación del ajuste  $r^2$  utilizando los dos criterios de sincronización y para los tres tipos de osciladores globalmente acoplados cuyo acoplamiento depende de la distancia entre los osciladores.

Criterio de sincronización	Tipo de oscilador	$k$	$r^2$
Diferencia de fase	LCOs	$0,2237 \pm 0,0314$	0.9493
	LCOs simplificados	$0,2216 \pm 0,0321$	0.9471
	IFOs	$0,9636 \pm 0,0480$	0.9969
Período	LCOs	$0,2067 \pm 0,0215$	0.9672
	LCOs simplificados	$0,1457 \pm 0,0126$	0.9711
	IFOs	$0,9755 \pm 0,0425$	0.9977

dios de transientes que pueden ser elevados, en tanto que para IFOs, los transientes son cortos, pero nuevamente resaltamos el hecho de que es muy difícil la sincronización para conjuntos de IFOs bajo esta configuración de acoplamiento.

#### 4. CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS

Los resultados obtenidos nos muestran que cuando se tiene acoplamiento global, el comportamiento de los LCOs y los LCOs simplificados es bastante parecido pero difiere notoriamente del comportamiento de los IFOs. Cuando el acoplamiento es dependiente de la distancia entre osciladores, la  $PST$  es menor que cuando el acoplamiento es de tipo campo medio; esto puede deberse a que la elección aleatoria de posiciones y condiciones iniciales se traduzca en que en algunas situaciones,

se esté en condiciones desfavorables para la sincronización, ya sea por la extrema cercanía entre osciladores o la extrema lejanía de los mismos; ambas situaciones no favorecen la sincronización puesto que en el caso de tenerse dos o más osciladores muy cercanos podría tenderse a una muerte de oscilaciones por ser la intensidad de acoplamiento muy grande. Por otra parte, si las distancias entre osciladores son muy grandes, la intensidad del acoplamiento es muy pequeña y esto se traduce en una probabilidad menor de sincronización tal como se observó en § 3.1.1. Los IFOs sincronizan rápidamente y con una  $PST$  unitaria cuando el acoplamiento es de tipo campo medio; sin embargo, cabe señalar que los IFOs que son tan populares para la modelización de diversos sistemas, presentan un comportamiento fuertemente diferente al de osciladores reales tales como los LCOs.

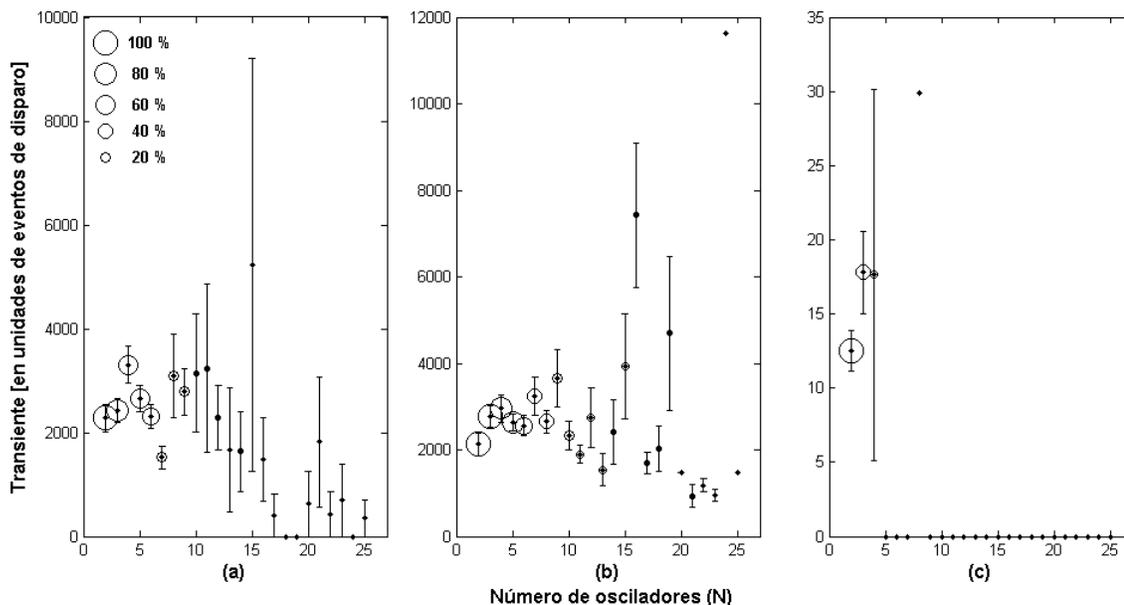


Figura 7. Transientes y  $PST$  (proporcional al tamaño de los círculos) en función del número de osciladores  $N$  para (a) LCOs, (b) LCOs simplificados y (c) IFOs, todos globalmente acoplados con un acoplamiento dependiente de la distancia entre los osciladores.

Como se señaló en § 1, a primera vista, los IFOs y los LCOs parecen ser muy similares pero las pequeñas diferencias conducen en algunos casos a comportamientos totalmente diferentes sobre todo cuando el acoplamiento es dependiente de la distancia entre osciladores. Estos resultados también sugieren la formación de cúmulos de osciladores sincronizados en cada población lo que podría dar lugar a patrones espacio-temporales si se considera que cada evento de encendido corresponde a la emisión de un flash luminoso. Parece existir además una influencia dada por la paridad en el número de osciladores que hace que aparezca una especie de oscilación en el crecimiento del valor de la  $PST$  en función del número de osciladores. El estudio de otras topologías de red se presenta como una perspectiva interesante en el sentido de analizar la influencia de la red en la sincronización de la población de osciladores

### Agradecimientos

Se agradece a los organizadores de la XV Conference on Nonequilibrium Statistical Mechanics and Nonlinear Physics (MEDYFINOL'06) por la invitación que permitió que parte de los resultados de este artículo sean comunicados en dicha conferencia que se llevó a cabo en Mar del Plata, Argentina del 4 al 8 de diciembre de 2006.

### REFERENCIAS

- [1] G. M. Ramírez Ávila, J. L. Guisset, & J. L. Deneubourg, "Synchronization in light-controlled oscillators," *Physica D*, **182**, 3–4, 254–273, 2003.
- [2] G. M. Ramírez Ávila, J. L. Guisset, & J. L. Deneubourg, "Estudio de la sincronización en un sistema de dos osciladores idénticos controlados por luz," *Rev. Bol. Fis.*, **10**, 1–7, 2004.
- [3] R. E. Mirollo & S. H. Strogatz, "Synchronization of pulse-coupled biological oscillators," *SIAM J. App. Math.*, **50**, 6, 1645–1662, 1990.
- [4] G. M. Ramírez Ávila, J. L. Guisset, & J. L. Deneubourg, "Synchronization in chains of light-controlled oscillators," *J. of Phys.: CS*, **23**, 252–258, 2005.
- [5] G. M. Ramírez Ávila, J. L. Guisset, & J. L. Deneubourg, "Sincronización y transientes en configuraciones unidimensionales de osciladores fotocontrolados localmente acoplados," *Rev. Bol. Fis.*, **12**, 1–7, 2006.
- [6] A. T. Winfree, "Biological rhythms and the behavior of populations of coupled oscillators," *J. Theor. Biol.*, **16**, 15–42, 1967.
- [7] C. Peskin, "Mathematical aspects of heart physiology," 1975.
- [8] D. H. Zanette & A. S. Mikhailov, "Mutual synchronization in ensembles of globally coupled neural networks," *Phys. Rev. E*, **58**, 872–875, 1998.
- [9] M. Majtanik, K. Dolan, & P. A. Tass, "Desynchronization in networks of globally coupled neurons with dendritic dynamics," *J. Biol. Physics*, **32**, 3, 307–333, 2006.
- [10] K. Y. Tsang, R. E. Mirollo, S. H. Strogatz, & K. Wiesenfeld, "Dynamics of a globally coupled oscillator array," *Physica D*, **48**, 1, 102–112, 1991.
- [11] J. W. Swift, S. H. Strogatz, & K. Wiesenfeld, "Averaging of globally coupled oscillators," *Physica D*, **55**, 3–4, 239–250, 1992.
- [12] W. Wang, I. Z. Kiss, & J. L. Hudson, "Experiments on arrays of globally coupled chaotic electrochemical oscillators: Synchronization and clustering," *Chaos*, **10**, 1, 248–256, 2000.
- [13] K. Miyakawa & K. Yamada, "Synchronization and clustering in globally coupled salt-water oscillators," *Physica D*, **151**, 2–4, 217–227, 2001.
- [14] A. S. Pikovsky & J. Kurths, "Collective behavior in ensembles of globally coupled maps," *Physica D*, **76**, 4, 411–419, 1994.

- [15] S.-J. Baek & E. Ott, “Onset of synchronization in systems of globally coupled chaotic maps,” *Phys. Rev. E*, **69**, 6, 066210, 2004.
- [16] M.-C. Ho, Y.-C. Hung, & I. M. Jiang, “Phase synchronization in inhomogeneous globally coupled map lattices,” *Phys. Lett. A*, **324**, 5–6, 450–457, 2004.
- [17] S. Bottani, “Synchronization of integrate and fire oscillators with global coupling,” *Phys. Rev. E*, **54**, 3, 2334–2350, 1996.
- [18] H. Hong, H. Park, & M. Y. Choi, “Collective synchronization in spatially extended systems of coupled oscillators with random frequencies,” *Phys. Rev. E*, **72**, 3, 036217–18, 2005.
- [19] J. Rougemont & F. Naef, “Collective synchronization in populations of globally coupled phase oscillators with drifting frequencies,” *Phys. Rev. E*, **73**, 1, 011104–5, 2006.
- [20] T. Kapitaniak & S. R. Bishop, *The Illustrated Dictionary of Nonlinear Dynamics and Chaos*. Chichester: John Wiley & Sons, Inc., 1999.
- [21] A. Pikovsky, M. Rosenblum, & J. Kurths, *Synchronization : a universal concept in nonlinear sciences*. New York: Cambridge University Press, 2001.
- [22] M. Beckerman, *Adaptive Cooperative Systems*. Wiley Series on Adaptive and Learning Systems for Signal Processing, Communications, and Control, New York, NY: John Wiley & Sons, 1997.
- [23] R. Perez Pascual & J. Lomnitz-Adler, “Coupled relaxation oscillators and circle maps,” *Physica D*, **30**, 1-2, 61–82, 1988.
- [24] L. Glass & M. C. Mackey, *From Clocks to Chaos. The Rhythms of Life*. Princeton: Princeton University Press, 1988.
- [25] S. Coombes, “Phase locking in networks of synaptically coupled McKean relaxation oscillators,” *Physica D*, **160**, 3-4, 173–188, 2001.
- [26] I. Z. Kiss, Y. Zhai, & J. L. Hudson, “Emerging coherence in a population of chemical oscillators,” *Science*, **296**, 5573, 1676–1678, 2002.
- [27] A. A. Brailove & P. S. Linsay, “An experimental study of a population of relaxation oscillators with a phase-repelling mean-field coupling,” *Int. J. Bif. & Chaos*, **6**, 7, 1211–1253, 1996.
- [28] J. L. Guisset, G. M. Ramírez Ávila, & J. L. Deneubourg, “Construcción de osciladores controlados por luz y medida de su comportamiento síncrono,” *Rev. Bol. Fis.*, **7**, 102–114, 2001.
- [29] D. Eck, “A network of relaxation oscillators that finds downbeats in rhythms,” in *Artificial Neural Networks-ICANN 2001* (G. Dorffner, ed.), (Berlin), 1239–1247, Springer, 2001.
- [30] T. L. Carroll, J. Heagy, & L. M. Pecora, “Synchronization and desynchronization in pulse coupled relaxation oscillators,” *Phys. Lett. A*, **186**, 3, 225–229, 1994.
- [31] S. R. Campbell, D. L. Wang, & C. Jayaprakash, “Synchrony and desynchrony in integrate-and-fire oscillators,” *Neural Comput.*, **11**, 7, 1595–1619, 1999.
- [32] S. R. Campbell, W. DeLiang, & C. Jayaprakash, “Synchronization rates in classes of relaxation oscillators,” *Neural Networks*, **15**, 5, 1027–1038, 2004.
- [33] J.-L. Guisset, J.-L. Deneubourg, & G. M. Ramírez Ávila, “The phase information associated to synchronized electronic fireflies,” *arXiv.nlin.AO/0206036*, 2002.
- [34] G. M. Ramírez Ávila, J. L. Guisset, & J. L. Deneubourg, “Synchronous behavior in small populations of light-controlled oscillators,” in *11th International IEEE Workshop on Nonlinear Dynamics of Electronic Systems* (R. Stoop, ed.), (Scuol/Schuls, Switzerland), 201–204, 2003.
- [35] G. M. Ramírez Ávila, J. L. Guisset, & J. L. Deneubourg, “Influencia del ruido en la sincronización de dos osciladores fotocontrolados,” *Rev. Bol. Fis.*, **11**, 44–51, 2005.
- [36] G. M. Ramírez Ávila, J. L. Guisset, & J. L. Deneubourg, “Influence of uniform noise on two light-controlled oscillators,” *a publicarse en International Journal of Bifurcation and Chaos (December 2007)*, 2007.
- [37] G. Goldsztein & S. H. Strogatz, “Stability of synchronization in networks of digital phase-locked loops,” *Int. J. Bif. & Chaos*, **5**, 4, 983–990, 1995.
- [38] A. Politi, R. Livi, G.-L. Oppo, & R. Kapral, “Unpredictable behaviour in stable systems,” *Europhys. Lett.*, **22**, 571, 1993.