Revista Boliviana de Física **12**, 97–117 (2006)

1^{ra} OLIMPIADA BOLIVIANA DE ASTRONOMÍA Y ASTROFÍSICA 7 Y 8 DE OCTUBRE DE 2006

Bustos R.[1], Miranda P.[1], Ticona R.[1],
Velarde A.[1], Blanco V. H.[1], Velarde F.[1],
Muñoz R.[2], Pereira G.[2], Gutiérrez V. H.[3],
Guaygua T.[4], Jemio C.[4], Portugal R.[5], Mamani R.[6],
Martínez L.[7], Taquichiri M.[8], Tavera W.[9], Raljevic M.[9],
Copa O.[10], Flores J.[11], Rojas D.[11]

[1] *Universidad Mayor de San Andrés (UMSA),Carrera de Física, La Paz*
[2] *Planetario Max Schreier, Carrera de Física, UMSA, La Paz*
[3] *Universidad Mayor, Real y Pontificia San Francisco Xavier de Chuquisaca (UMRPSFXCH) Facultad de Tecnología – Carrera de Ingeniería de Sistemas, Sucre*
[4] *Universidad Técnica de Oruro (UTO), Facultad Nacional de Ingeniería (FNI), Oruro*
[5] *Universidad Mayor de San Simón, Facultad de Ciencia y Tecnología, Cochabamba*
[6] *Universidad Autónoma Tomas Frías (UATF), Carrera de Física, Potosí*
[7] *Universidad Privada de Santa Cruz de la Sierra, UPSA, Santa Cruz*
[8] *Universidad Autónoma Juan Misael Saracho, UAJMS, Tarija*
[9] *Sociedad Boliviana de Física (SOBOFI)*
[10] *Colegio Domingo Savio, Sucre.*
[11] *Colegio BEREA, Santa Cruz*

RESUMEN

Se presentan los exámenes resueltos de 3^{ro} y 4^{to} de Secundaria tomados en la 1^{ra} OLIMPIADA BOLIVIANA DE ASTRONOMÍA (1^{ra} OBA) así como también los ganadores en cada categoría. El evento se llevo a cabo los días 7 y 8 de Octubre de 2006 en los predios de la Carrera de Física de la Universidad Mayor de San Andrés (UMSA), La Paz.

La Página Internet del proyecto es: `http://www.fiumsa.edu.bo/olimpiada/`

PREMIOS

Se contó con la participación de los siguientes departamentos Bolivianos (7): Chuquisaca, Cochabamba, La Paz, Oruro, Potosí, Santa Cruz y Tarija. Cada delegación constaba de un máximo de 6 estudiantes (3 de 3º de Sec. y 3 de 4º de Sec.) más un profesor líder.

La clasificación final quedo de la siguiente manera:

4º de Secundaria:

Premio	Nombre	Colegio	Ciudad
Medalla de Oro:	Jiménez Durán Luis	Belgrano	Tarija
Medalla de Plata:	Córdova Salazar Estela	Berea	Santa Cruz
Medalla de Bronce:	Frías Del Carpio Isabel	Los Pinos	La Paz

3º de Secundaria:

Premio	Nombre	Colegio	Ciudad
Primer lugar:	Guzmán Mamani Gabriela	Isabel Saavedra	Santa Cruz
Segundo lugar:	Sánchez Sainz César	Santa Eufrasia	La Paz
Tercer lugar:	Santalla Quispe Iván	Villamil	La Paz
Cuarto lugar:	Peralta Núñez Rodolfo	La Salle	Santa Cruz
Quinto lugar:	Birhuett M. Enrique	Bancario	Cochabamba

Los tres primeros lugares de la categoría de 4º de Secundaría tienen como principal premio el ingreso directo a la carrera de Física de la Universidad Mayor de San Andrés (UMSA), a la Universidad Privada de Santa Cruz (UPSA) y se está gestionando el ingreso directo a la Universidad Autónoma Juan Misael Saracho (UAJMS) así como también a cualquier Universidad estatal Boliviana. Los cinco estudiantes ganadores de 3º de Secundaria forman la selección Boliviana de Astronomía que representará al país en la **1ª Olimpiada Andina de Astronomía y Astrofísica** a llevarse a cabo en Julio de 2007 en la ciudad de La Paz, Bolivia. Así como también representarán al país en la **1ª Olimpiada Internacional de Astronomía y Astrofísica** a llevarse a cabo en Noviembre de 2007 en Tailandia. (Nota: los pasajes aéreos no están asegurados)

1ª OLIMPIADA BOLIVIANA DE ASTRONOMÍA Y ASTROFÍSICA

3º de Secundaria

Notas: El examen contiene tres partes; I.- Problemas conceptuales y pequeños ejercicios (40 puntos), II.- Problemas Teóricos (30 puntos) y III.- Problemas prácticos (30 puntos).

I.- PROBLEMAS CONCEPTUALES – 3º de Secundaria

I-1.-Indique la diferencia entre telescopios refractores y reflectores (5 puntos).

R. I-1.-El reflector usa un espejo cóncavo, la luz es desviada a un foco mediante otros espejos hasta el ocular. El refractor usa una lente convexa, la luz llega directamente al ocular.

I-2.- ¿De qué manera afecta la atmósfera a la medición de las radiaciones del espectro electromagnético? ¿Qué bandas son afectadas? (5 puntos)

R.I-2.- La atmósfera refleja a las ondas de baja frecuencia (menores a 20Mhz), absorbe a las ondas de alta frecuencia como ser; gamma, Rx, UV, atenúa y dispersa a las ondas del rango visible.

I-3.- ¿Por qué los grandes observatorios del mundo se concentran en solamente algunos puntos de la superficie de la tierra? (5 puntos)

R.I-3.- Por que la atmósfera de esos sitios permite una extraordinaria resolución en la imagen. Estos lugares son: Hawai (USA), Atacama (Chile), Islas Canarias (España).

I-4.- Enuncie la nueva definición de Planeta, y en consecuencia describa los objetos del Sistema Solar (5 puntos)

R.I-4.- La definición aceptada actualmente por la International Union of Astronomy (IUA) para *planeta* en nuestro Sistema Solar es:

"Un cuerpo celeste que (a) está en órbita alrededor del Sol, (b) Tiene suficiente masa para que su propia gravedad al convertirlo en un cuerpo rígido lo haya forzado para que esta asuma la forma de equilibrio hidrostático (aproximadamente esférico) y (c) haya limpiado el vecindario en torno a su órbita.

La decisión establece tres principales categorías de objetos en nuestro Sistema Solar:

- Planetas: los ocho mundos desde Mercurio hasta Neptuno.
- Planetas Enanos: Plutón y cualquier objeto esférico que no "haya limpiado el vecindario entorno a su órbita, y que no sea un satélite."
- Pequeños cuerpos del Sistema solar: Todos los demás objetos que orbitan el Sol.

I-5.- ¿Por qué son tan extremas las estaciones en Urano? (5 puntos).

R.I-5.- Debido a la fuerte inclinación de su eje de rotación: 98 grados.

I-6.- El Sol está en una galaxia que llamamos Vía Láctea. El Sol está a una distancia de 27700 años-luz del centro de la Galaxia. El Sol se mueve a una velocidad de 250 [*Km/s*] en una órbita circular alrededor del centro galáctico.

a) ¿En cuanto tiempo (años terrestres) el Sol completa una órbita alrededor del centro de la Vía Láctea? (5 puntos)

b) ¿Cuántas vueltas alrededor del centro galáctico el Sol ya dio desde que fue formado? (5 puntos)

Datos: Tome a la velocidad de la luz c = 300000 [*Km/s*]

R.I-6.a)

T = (2 pi R) / V = (2 x 3,14 x 2,6 x 1017 km) / (250 km/s) = 6,5 x 1015 s.

T = 6,5 x 1015 s / 31.536.000 (s/año) = 206 x 106 años = 206 millones de años! = 206×10^6 [*años*]

R.I-6. b) 4,5 x 109 años / 206 x 106 años = 22 vueltas

I-7.- Tres cuerpos idénticos de masa ***m*** están situados en los vértices de un triángulo equilátero de lado ***L***. Cada uno de los cuerpos se puede mover en una órbita circular circunscrita al triángulo original. Si las únicas fuerzas que actúan sobre los cuerpos son las atracciones gravitacionales mutuas, ¿Cuál será la rapidez de su movimiento? (5 puntos).

R.I-7.- Las masas giran en circulo de radio ***r***, estando en los vértices del triángulo equilátero resulta ***r =L/2cos(30º)***. Cada masa es atraída por la fuerza gravitacional de las dos masas hacia el centro, resultando:

$$\frac{mv^2}{r} = G\frac{mm}{L^2}\cos(30^o) + G\frac{mm}{L^2}\cos(30^o)$$

Remplazando r y simplificando, tenemos:

$$v = \sqrt{G\frac{m}{L}}$$

II.- PROBLEMAS TEORICOS – 3º de Secundaria

II-1. Un cohete espacial con masa M = 12 [T] esta moviéndose al rededor de la Luna en una órbita circular de altura h = 100 [Km]. Los motores son activados por corto tiempo para pasar a la órbita de alunizaje. La velocidad de expulsión de gases es u = 10^4 [m/s]. El radio de la luna es R_M = 1,7·10^3 [Km], la aceleración gravitacional cerca la superficie de la Luna es g_M = 1.7 [m/s^2]

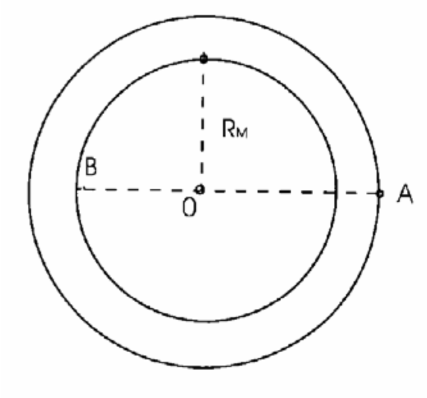


Fig. II.1.1

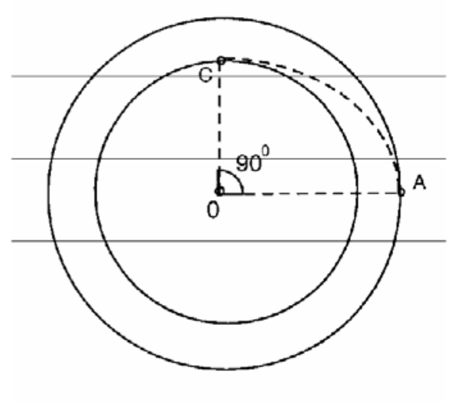


Fig. II.1.2

1) ¿Qué cantidad de combustible se consumirá para que activando los motores de frenado en el punto A de la trayectoria, el cohete pueda alunizar sobre la Luna en el punto B (Fig. II.1.1)? (8 puntos).
2) En el Segundo escenario de alunizaje, en el punto A, el cohete se impulsa dirigiéndose hacia el centro de la Luna, Para poner el cohete al encuentro de la superficie de la Luna en el punto C (Fig. II.1.2). ¿Que cantidad de combustible se requerirá en este caso? (7 puntos).

Solución Problema II-1.

1) Durante el movimiento del cohete alrededor de la órbita circular este experimenta una aceleración centrípeta debida a la fuerza gravitacional de la Luna:

$$G\frac{MM_M}{R^2}=\frac{Mv_0^2}{R},$$

donde $R = R_M + h$ es el primer radio de la orbita, v_0 es la velocidad del cohete en la órbita circular. Por tanto,

$$v_0=\sqrt{G\frac{M_M}{R}}$$

dada la relación: $g_M = G\dfrac{M_M}{R_M^2}$, resulta:

$$v_0 = \sqrt{\frac{g_M R_M^2}{R}} = R_M \sqrt{\frac{g_M}{R_M + h}} \qquad (1)$$

La velocidad del cohete permanecerá perpendicular al radio-vector OA después de que el motor de frenado envía un momentum tangencial al cohete (Fig.1). El cohete debe moverse en una trayectoria elíptica con el foco en el centro de la Luna.

Denotando la velocidad del cohete en los puntos A y B como v_A y v_B escribimos la ecuación para la conservación de energía y el momentum de la forma:

$$\frac{Mv_A^2}{2} - G\frac{MM_M}{R} = \frac{Mv_B^2}{2} - G\frac{MM_M}{R_M} \qquad (2)$$

$$Mv_A R = Mv_B R_M \qquad (3)$$

Resolviendo las ecuaciones (2) y (3) encontramos

$$v_A = \sqrt{2G\frac{M_M R_M}{R(R+R_M)}}$$

Tomando en cuenta (1), tenemos

$$v_A = v_0\sqrt{\frac{2R_M}{R+R_M}}\ .$$

De donde el cambio de velocidad Δv en el punto A debe ser

$$\Delta v = v_0 - v_A = v_0\left(1-\sqrt{\frac{2R_M}{R+R_M}}\right) = v_0\left(1-\sqrt{\frac{2R_M}{2R_M+h}}\right) = 24[m/s]$$

De la ley de conservación del momentum en el sistema “cohete-combustible” se puede escribir que

$$(M-m_1)\Delta v = m_1 u$$

Donde m_1 es la masa del combustible (fluido) quemado. De donde resulta

$$m_1 = \frac{\Delta v}{u+\Delta v} M$$

Aproximando para $\Delta v << u$ encontramos finalmente que $m_1 \approx \dfrac{\Delta v}{u} M = 29[\mathrm{Kg}]$

2) En el Segundo caso el vector $\vec{v}_2$ está dirigido perpendicularmente al vector $|\vec{v}_0|$, por tanto:

$$\left|\vec{v}_A = \vec{v}_0 + \Delta\vec{v}_2, \qquad v_A = \sqrt{v_0^2 + \Delta v_2^2}\right. .$$

Basándonos en la ley de conservación de energía en este caso la ecuación puede ser escrita como

$$\frac{M\left(v_0^2 + \Delta v_2^2\right)}{2} - \frac{GMM_M}{R} = \frac{Mv_C^2}{2} - \frac{GMM_M}{R_M} \qquad (4)$$

Y por la ley de conservación de momentum

$$Mv_0 R = Mv_C R_M \,. \qquad (5)$$

Resolviendo las ecuaciones (4) y (5) tomando en cuenta (1) encontramos

$$\Delta v_2 = \sqrt{g_M \frac{\left(R - R_M\right)^2}{R}} = h\sqrt{\frac{g_M}{R_M + h}} \approx 97[\mathrm{m/s}]\,.$$

Usando la ley de conservación del momentum obtenemos.

$$m_2 = \frac{\Delta v_2}{u} M \approx 116[\mathrm{Kg}]\,.$$

Problema No. II-2

Eclipse Total de Luna.

II-2.1.- Un eclipse de Luna se produce cuando la Luna atraviesa el cono de sombra de la Tierra. Debido a que la Tierra tiene atmósfera, la luz solar se refracta en ella iluminando a la Luna. Es por eso que podemos observar a la Luna durante la fase total (umbral) del eclipse. Un modelo simplificado de este fenómeno seria considerar a la atmósfera como si fuera un medio con una superficie esférica y con índice de refracción n_{atm} que refracta los rayos solares para que lleguen hasta la posición donde se encuentra la Luna. Este índice depende de la longitud de onda de la luz. Consideremos que el índice varía de la forma:

$$n_{atm} = \frac{q}{\lambda},$$

donde $q = 1.67$ [nm] es un coeficiente y λ es la longitud de onda. Además, conocemos que la distancia Tierra-Sol es 1 Unidad Astronómica y podemos tomar la distancia Tierra-Luna igual a 384000 [Km] (Fig. II.2.1)

a) Determine la longitud de onda de la luz que ilumina a la Luna durante el eclipse (5 puntos)

b) ¿De qué color aparecerá la Luna durante el eclipse? (2 puntos)

Recuerde que la ley de Snell de la refracción está dada por $n_i sen\theta_i = n_r sen\theta_r$ y que el índice de refracción en el vacío es 1.

Considere que para ángulos pequeños $sen\theta \approx \theta$.

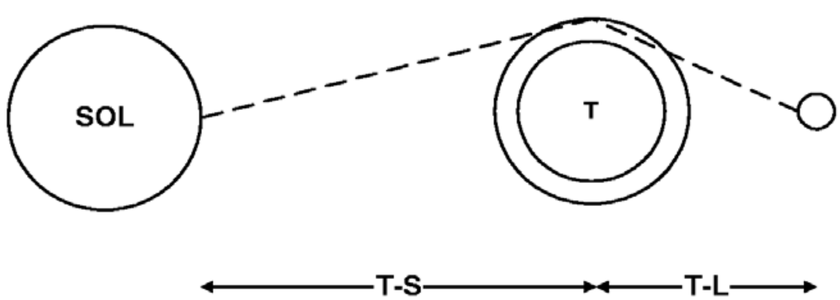


Fig. II.2.1

II-2.2.- Durante la fase umbral del eclipse de Luna, el cono de sombra que atraviesa la Luna tiene la configuración de la Figura II.2.1.

c) Si se conocen los diámetros del Sol y de la Tierra y las distancias Sol-Tierra y Tierra-Luna. Calcular la extensión de la órbita que está dentro del cono de sombra (5 puntos)

d) Si el período de revolución de la Luna es de 29.5 días. ¿Qué tiempo demora la Luna en atravesar el cono de sombra? (3 puntos)

Datos: Radio solar = 6.96×10^{8} $[m]$

Radio terrestre = $6.37\times10^{6}[m]$

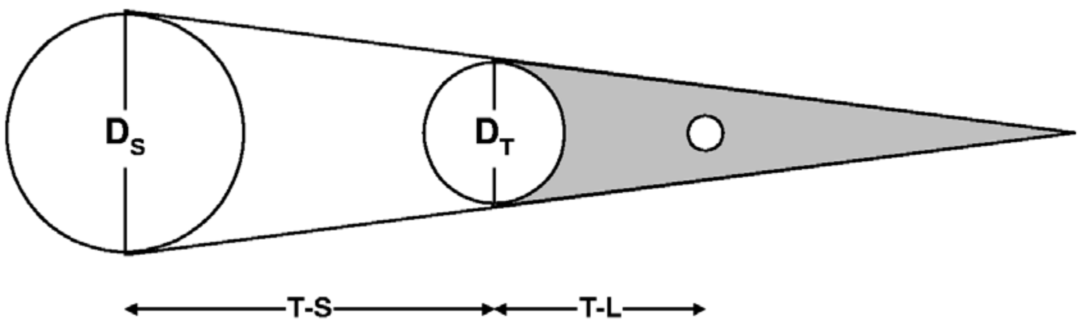


Fig. II.2.2

R.II-2a)

$$n_i sen\theta_i = n_r sen\theta_r$$

$$sen\theta \approx \theta$$

$$\theta_i = n_r\theta_r$$

Suponiendo modelo simple nr = q 1/λ

Simplificando $\theta_i = \dfrac{q}{\lambda}\theta_{r_\lambda}$

$$\theta_i = \frac{R_T}{d_{TS}}, \theta_{r_\lambda} = \frac{R_T}{d_{TL}}$$

$$\lambda = q\frac{\theta_{r_\lambda}}{\theta_i} \qquad \lambda = q\frac{R_T d_{TS}}{d_{TL} R_T} \qquad \lambda = q\frac{d_{TS}}{d_{TL}}$$

Sustituyendo valores el resultado es: $\lambda = 650[nm]$.

R.II-2b) Esta longitud de onda corresponde al color rojo.

R.II-2c) Sacando proporciones entre diámetros y distancias para el cono de sombra, se obtiene que:

$$\alpha = \frac{s}{x} = \frac{D_T}{d_{TL} + x} = \frac{D_S}{d_{TS} + d_{TL} + x}$$

De la proporción 2 y 3 despejamos ***x*** y obtenemos:

$$x = \frac{D_T(d_{TS} + d_{TL}) - D_S * d_{TL}}{D_S - D_T}$$

X= 1005257 $[Km]$

De las proporciones 1 y 2 obtenemos s: $s = \dfrac{D_T * x}{d_{TL} + x}$

Por tanto la longitud de la orbita lunar dentro de la sombra resulta:

. **S=9243** $[Km]$

R.II-2d) El ángulo dentro de la sombra se obtiene de:

$$\theta = \frac{s}{d_{TL}} = 0.024\ [Rad] = 1°37'$$

Conocemos el periodo orbital lunar y su radio de la orbita. Del concepto de velocidad angular obtenemos:

$$t = \frac{\theta}{2\pi} T = 2.7\ [horas]$$

Considerando a la Luna como objeto puntual.

Si consideramos además que la luna debe estar dentro de la sombra este valor cambia para t=1.9 [horas]. Ver Figura II.2.3.

Nota: Cualquier enfoque aproximado es válido.

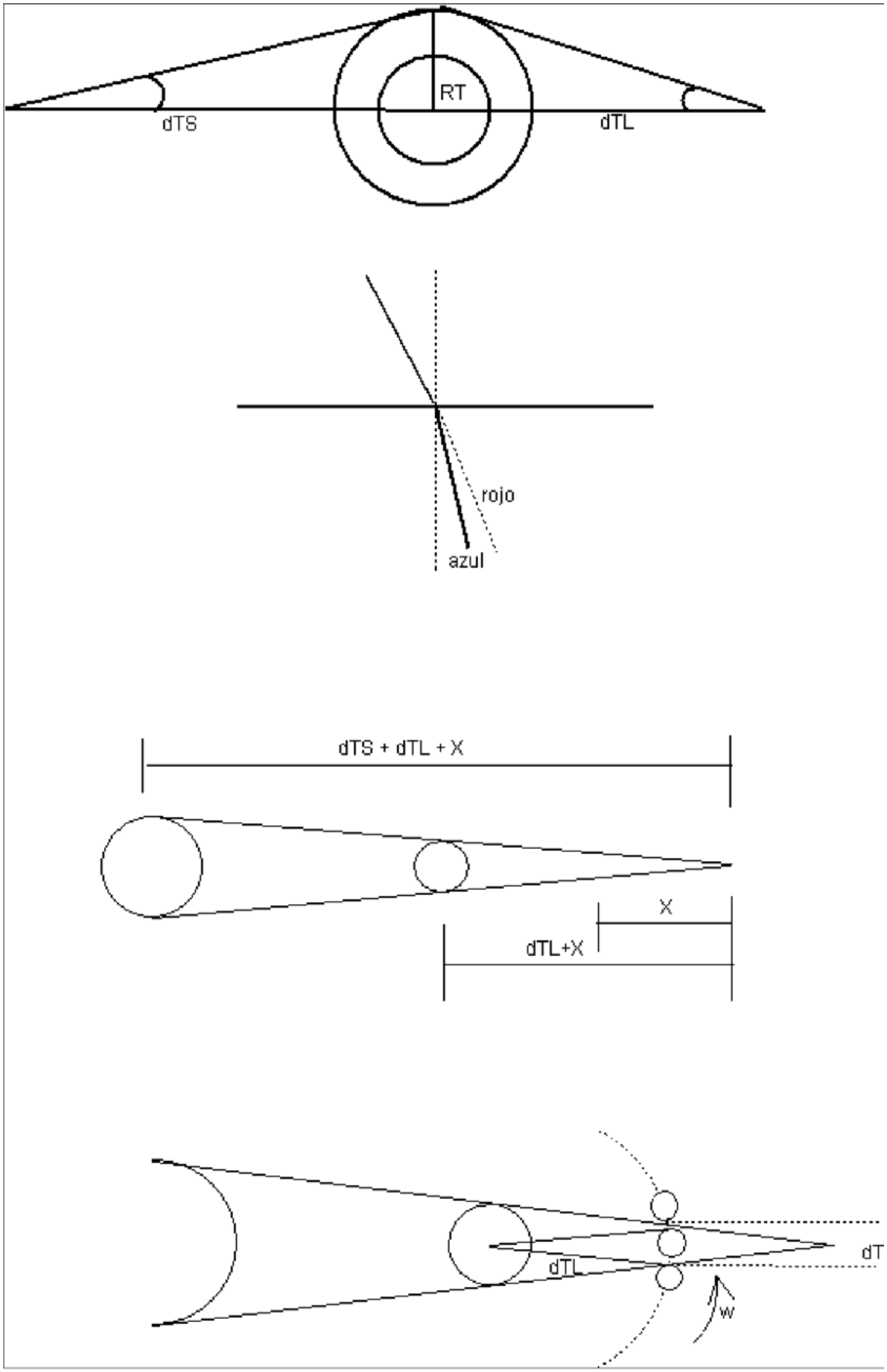


Figura II.2.3

III.- PROBLEMAS PRACTICOS – 3º de Secundaria

III-1.- Conociendo las coordenadas geográficas de la ciudad de Cobija (Lat. 11º2' S, ong. 68º43' O) indicar cual será la altura del Polo Sur Celeste para esta ciudad. (3 puntos)

R.- 11º2'

III-2.- En la carta adjunta marcar:

La posición en la que sale la Luna Llena más próxima al solsticio de diciembre (5 puntos)

La posición de la Luna a media noche en la fase de Cuarto Menguante más próxima al solsticio de diciembre (5 puntos).

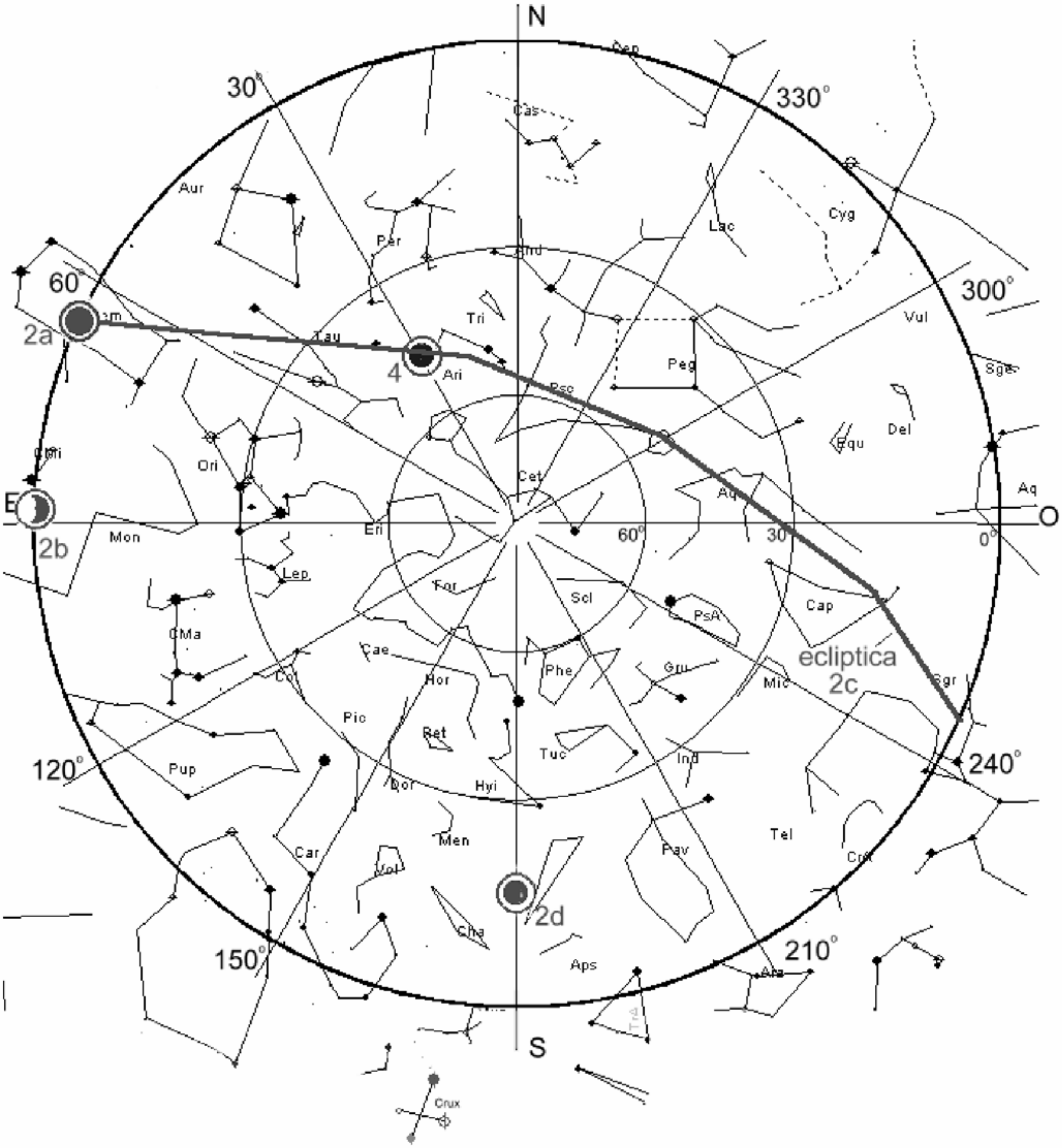
La trayectoria aproximada de la Eclíptica (3 puntos).

La posición del Polo Sur Celeste (3 puntos).

III-3.- Refiriéndonos nuevamente a la Carta , ¿Cuántas horas faltan para que la constelación de Orión culmine?. (5 puntos).

R.- 2 horas 3 horas <u>4 horas</u> 5 horas 6 horas

III-4.- Suponiendo que esta carta se hubiera elaborado para las 22:00 horas de la fecha de la oposición de Marte. Marcar en la carta la posición de Marte. (6 puntos).


N
S
E
O
30°
330°
300°
60°
0°
120°
150°
210°
240°
60°
30
2a
2b
2c
2d
4
ecliptica
Cas
Aur
Per
And
Lac
Cyg
Tri
Vul
Tau
Ari
Peg
Psc
Sge
Del
Equ
Ori
Cet
Aq
Mon
Eri
Lep
For
Scl
PsA
Cap
CMa
Cae
Phe
Gru
Col
Hor
Mic
Sgr
Pic
Ret
Tuc
Ind
Pup
Dor
Hyi
Tel
Car
Men
Pav
Vol
Cha
Aps
Ara
Crux

1ª OLIMPIADA BOLIVIANA DE ASTRONOMÍA Y ASTROFÍSICA

4º de Secundaria

Notas: El examen contiene tres partes; I.- Problemas conceptuales y pequeños ejercicios (40 puntos), II.- Problemas Teóricos (30 puntos) y III.- Problemas prácticos (30 puntos).

I.- PROBLEMAS CONCEPTUALES – 4º de Secundaria

Nota: Los problemas **I-1** *al* **I-5** *están resueltos en el examen de 3º de Sec.*

I-6.- La luz solar tarda 8,33 minutos en llegar a la Tierra y 43,3 minutos en alcanzar Júpiter.

a)¿Cuál es el período de rotación de Júpiter alrededor del Sol? (5 puntos)

b) Calcule la masa del Sol. (5 puntos).

($G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ N\ m^2\ kg^{-2}$)

R.I-6.- a) Por la Tercera Ley de Kepler se tiene: $\dfrac{T_1^{\,2}}{T_2^{\,2}} = \dfrac{r_1^{\,3}}{r_2^{\,3}}$

donde T_1 y T_2 son, respectivamente, los periodos de rotación de la Tierra y de Júpiter; r_1 y r_2 son los correspondientes radios de las órbitas. Si las consideramos circulares, entonces,

$$T_2 = \sqrt{\frac{r_2^{\,3}}{r_2^{\,3}}}T_1$$

para calcular los radios r_1 y r_2:

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{ct_2}{ct_1} = \frac{t_2}{t_1} = \frac{41.6\,\text{min}}{8.33\,\text{min}} = 4.99$$

como T_1=1 [*año*] entonces: **a)** $\boldsymbol{T_2} = \mathbf{11.2}$ [*años*]

b) Considerando la órbita circular, la fuerza centrípeta es igual a la fuerza gravitacional:

$$m\omega^2 r = \frac{GMm}{r^2}$$

donde M es la masa del Sol, m es la masa de un planeta, r es el radio de la órbita, ω es la velocidad angular del planeta, y G es la constante de gravitación universal. Entonces:

$$M = \frac{4\pi^2 r^3}{T^2 G}$$

Para el caso de la Tierra, T = 1 [*año*] = 3.15x10^7 [*s*]; r =1.50x10^{11} [*m*]

De donde **M=2.01x10^{30} [*Kg*].**

I-7.- Tres cuerpos idénticos de masa m están situados en los vértices de un triángulo equilátero de lados L. Cada uno de los cuerpos se puede mover en una órbita circular circunscrita al triángulo original. Si las únicas fuerzas que actúan sobre los cuerpos son las atracciones gravitacionales mutuas, ¿Cuál será la rapidez de su movimiento? (5 puntos).

R.I-7.- Las masas giran en circulo de radio r, estando en los vértices del triángulo equilátero resulta *r =L/2cos(30º).* Cada masa es atraída por la fuerza gravitacional de las dos masas hacia el centro, resultando:

$$\frac{mv^2}{r} = G\frac{mm}{L^2}\cos(30^{\circ}) + G\frac{mm}{L^2}\cos(30^{\circ})$$

Remplazando r y simplificando, obtenemos finalmente:

$$v = \sqrt{G\frac{m}{L}}$$

II.- PROBLEMAS TEORICOS – 4º de Secundaria

Nota: El problema **II-1** *está resuelto en el examen de 3º de Sec.*

Problema No. II-2

Observando la estrella d Cefeo

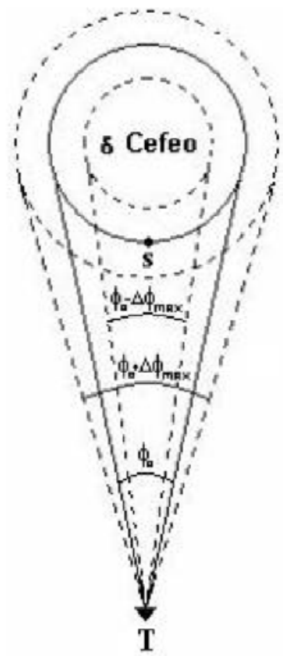


Figura II.2.a

La estrella d Cefeo es una representante típica del numeroso grupo de estrellas pulsantes conocidas como cefeidas clásicas. Estas estrellas se caracterizan por variaciones periódicas del brillo, asociadas a pequeñas oscilaciones de sus radios. Se conoce que el período de estas oscilaciones para δ Cefeo es t, y que en este proceso el diámetro angular, medido desde un observatorio **T** en la Tierra, varía entre $\phi_0 - \Delta\phi_{max}$ y $\phi_0 + \Delta\phi_{max}$ (ver Figura II.2.a), todos ángulos muy pequeños. Se conoce también que debido al conocido efecto Doppler, la luz de longitud de onda λ, correspondiente a cierta transición en el átomo de helio, y que es emitida desde el punto S en la superficie de la estrella en el instante en que la velocidad de expansión es máxima, está desplazada en Δλ. Con estos datos, veremos que es posible determinar la masa M de δ Cefeo y la distancia L a la que la estrella se encuentra de nosotros. Para esto, consideraremos a δ Cefeo como una esfera de gas caliente que se dilata y contrae adiabáticamente y despreciaremos tanto el movimiento de la Tierra como cualquier efecto relativista.

II-2.1

Suponga que el movimiento pulsatorio de δ Cefeo puede considerarse armónico simple. Determine la distancia L desde el centro de esta estrella hasta el observatorio terrestre a partir del desplazamiento Doppler Δλ de la línea λ en función de parámetros observados desde T y la velocidad de la luz en el vacío, c. Tenga en cuenta que para el desplazamiento Doppler de una señal luminosa emitida por una fuente que se acerca o aleja del receptor a una velocidad $\boldsymbol{v}$, se cumple la expresión $\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{v}{c}$. [5 puntos]

Para responder las siguientes preguntas, concentre su atención en la expresión de la 2a Ley de Newton para un pequeñísimo volumen de la estrella que encierra una pequeña masa m, ubicado muy cerca de la superficie de la estrella. Sobre este volumen actúa una fuerza PA, correspondiente a la presión P que le empuja hacia fuera, y la atracción de prácticamente toda la masa M de la estrella. Tenga en cuenta que el área de la sección del pequeño volumen es $A=\Omega\ R^2$, donde R es la posición radial de la masa m y Ω es una constante.

II-2.2

Denotemos por un subíndice "0" las magnitudes correspondientes a la posición de equilibrio de la estrella. Obtenga una expresión para la presión en el equilibrio, P_0 en función de m, ϕ_0, $\Omega\Delta\lambda$, λ, M y la constante gravitacional G. (5 puntos).

II-2.3

Teniendo en cuenta los resultados obtenidos en II-2.1) y II-2.2), halle una expresión para la frecuencia de oscilación de δ Cefeo en función de M, L , ϕ_0, el exponente adiabático γ y la constante de gravitación universal G. A partir de esta expresión, determine la masa M de δ Cefeo en función de γ, G, c y los parámetros observados descritos en el segundo párrafo del enunciado. (5 puntos).

Si $\Delta R=R-R_0$, y teniendo en cuenta que las oscilaciones son pequeñas, utilice la aproximación $\left(1+\frac{\Delta R}{R_0}\right)^{\alpha} \approx 1+\alpha\frac{\Delta R}{R_0}$.

Considere que en un proceso adiabático se cumple que PV^{γ} es constante, donde P y V son la presión y el volumen del gas, respectivamente.

Respuesta al ejercicio II-2.1

El radio R de la estrella está relacionado con el diámetro angular y la distancia a la estrella L según (simples consideraciones geométricas)

$$R = L\sin\frac{\phi}{2} \approx \frac{\phi}{2} \qquad \text{(RII-2.1.1)}$$

donde se tuvo en cuenta la pequeñez de los ángulos en consideración. Consecuentemente, la amplitud de la oscilación del radio ΔR_{max} de la estrella estará dada por

$$\Delta R_{\max} = \frac{L\Delta\phi_{\max}}{2} \qquad \text{(RII-2.1.2)}$$

Conociendo las características de los movimientos armónicos, tendremos que la velocidad máxima de expansión de la superficie de la estrella tendrá la expresión

$$v_{\max} = \omega\Delta R_{\max} = \frac{\pi L\Delta\phi_{\max}}{\tau} \qquad \text{(RII-2.1.3)}$$

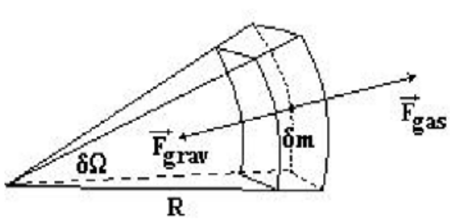
donde se tuvo en cuenta que $\omega=2\pi/\tau$. Fórmulas para el efecto Doppler longitudinal demasiado estándares como para demostrar aquí dicen que

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda}=\frac{v_{max}}{c}. \qquad \text{(RII-2.1.4)}$$

Finalmente, hallamos

$$L=\frac{c\tau}{\pi\Delta\phi_{max}}\cdot\frac{\Delta\lambda}{\lambda}. \qquad \text{(RII-2.1.5)}$$

Respuesta al ejercicio II-2.2



Está claro que en el equilibrio

$$0=P_0\cdot\Omega\cdot R_0^2-G\frac{Mm}{R_0^2}. \qquad \text{(RII-2.2.1)}$$

de donde

$$P_0=G\frac{mM}{\Omega R_0^4}=\frac{GmM}{\Omega\phi_0^4L^4} \qquad \text{(RII-2.2.2)}$$

sustituyendo (RII-2.1.5) en (RII-2.2.2) se llega a

$$P_0=\frac{GmM}{\Omega}\left(\frac{\pi\Delta\phi_{max}}{c\tau}\frac{\lambda}{\Delta\lambda}\right)^4 \qquad \text{(RII-2.2.3)}$$

Respuesta al ejercicio II-2.3

La ecuación de movimiento para el pequeño volumen de gas que estamos considerando es solución de

$$m\cdot a=P\cdot\Omega\cdot R^2-G\frac{Mm}{R^2}. \qquad \text{(RII-2.3.1)}$$

Teniendo en cuenta que el volumen es proporcional al cubo de las dimensiones lineales y que en procesos adiabáticos $\boldsymbol{PV^{\gamma}}$ es constante, tendremos que $PR^{3\gamma} = P_0 R_0^{3\gamma}$. De donde se sigue que

$$P = \left(\frac{R}{R_0}\right)^{-3\gamma} P_0 \qquad \text{(RII-2.3.2)}$$

Sustituyendo estos resultados y la expresión (RII-2.2.2) en la ecuación de movimiento se obtiene, después de eliminar el factor común en ambos miembros m,

$$a = G\frac{M}{R_0^2}\left\{\left(1+\frac{\Delta R}{R_0}\right)^{2-3\gamma} - \left(1+\frac{\Delta R}{R_0}\right)^{-2}\right\} \qquad \text{(RII-2.3.3)}$$

donde hemos definido $\boldsymbol{\Delta R = R - R_0}$ la variación del radio de la estrella respecto al equilibrio. Teniendo en cuenta que esta variación es pequeña y utilizando la igualdad aproximada $(1+x)^{\alpha} \approx 1+\alpha x$ obtenemos

$$a = -G\frac{M}{R_0^3}(3\gamma-4)\Delta R \qquad \text{(RII-2.3.4)}$$

El coeficiente de $\boldsymbol{\Delta R}$ en el segundo miembro es precisamente el cuadrado de la frecuencia buscada, o sea,

$$\omega = \sqrt{G\frac{M}{R_0^3}(3\gamma-4)} \qquad \text{(RII-2.3.5)}$$

Como ya vimos en la solución a la Pregunta 1, $\boldsymbol{R_0 = L\phi_0/2}$, con lo cual

$$\omega = \sqrt{8G\frac{M}{\phi_0^3 L^3}(3\gamma-4)} \qquad \text{(RII-2.3.6)}$$

Teniendo en cuenta finalmente que $\boldsymbol{\omega = 2\pi/\tau}$ y la expresión para $\boldsymbol{L}$ hallada en la Pregunta II-2.1, encontramos para la masa de d Cefeo la expresión

$$M = \frac{1}{2\pi}\frac{c^3 \phi_0^{\,3} \tau}{G(3\gamma-4)\Delta\phi_{max}^{\,3}}\left(\frac{\Delta\lambda}{\lambda}\right)^3 \qquad \text{(RII-2.3.7)}$$

III.- PROBLEMAS PRACTICOS – 4º de Secundaria

Nota: Estos problemas están resueltos en el examen de 3º de Sec.

III-1.- Conociendo las coordenadas geográficas de la ciudad de Cobija (Lat. 11º2' S, Long. 68º43' O) indicar cual será la altura del Polo Sur Celeste para esta ciudad. (3 puntos)

III-2.- En la carta adjunta marcar:

a) La posición e la que sale la Luna Llena más próxima al solsticio de diciembre (5 puntos)
b) La posición de la Luna a media noche en la fase de Cuarto Menguante más próxima al solsticio de diciembre (5 puntos).
c) La trayectoria aproximada de la Eclíptica (3 puntos).
d) La posición del Polo Sur Celeste (3 puntos).

III-3.- Refiriéndonos nuevamente a la Carta , ¿Cuántas horas faltan para que la constelación de Orión culmine?. (5 puntos).

R.- 2 horas 3 horas <u>4 horas</u> 5 horas 6 horas

III-4.- Suponiendo que esta carta se hubiera elaborado para las 22:00 horas de la fecha de la oposición de Marte. Marcar en la carta la posición de Marte. (6 puntos).