

# UN MODELO HIDRODINÁMICO AUTOSIMILAR PARA CURVAS DE ROTACIÓN GALÁCTICAS

Urzagasti D.

*Instituto de Investigaciones Físicas  
Universidad Mayor de San Andrés  
La Paz-Bolivia*

## RESUMEN

Se construye un modelo para describir el comportamiento de la velocidad circular de rotación de galaxias. Para ello se utilizan los resultados del modelo cosmológico estándar para normalizar las ecuaciones de un fluido ideal que se aleja de la expansión homogénea de Hubble y colapsa de manera autosimilar hacia un exceso de densidad inicial. Se adopta el sistema de coordenadas esféricas con el eje polar coincidente con el eje de rotación galáctico. La única interacción considerada es la gravitacional y, como buena aproximación, se trabaja con un potencial gravitacional originado solamente por la componente dominante en la masa, la cual es asumida con simetría esférica, conformada por materia oscura y estrellas de tipo halo. Se asume establecido el equilibrio hidrostático en las direcciones distintas de la radial y se obtiene una solución para la velocidad circular. Se promedia esta solución en las variables angulares proponiendo la presencia de un fenómeno de pulsaciones en las oscilaciones de las ondas de densidad y se obtiene una fórmula de ajuste para curvas de rotación. Se ajusta el modelo a los datos de curvas de rotación de diez galaxias obteniendo un buen acuerdo, y con estos ajustes se obtienen distintos parámetros de la estructura y dinámica de galaxias.

## 1. INTRODUCCIÓN

Las curvas de rotación de galaxias espirales constituyen una fuente de información muy valiosa en el estudio de la estructura y dinámica de estos objetos. En estas galaxias, el movimiento de rotación es muy superior en magnitud respecto de otros movimientos y por ello, los rasgos de la velocidad circular como función de la distancia radial sobre el plano de rotación son muy bien definidos y comunes a todas ellas. El rasgo más importante del comportamiento de la velocidad circular es que a medida que aumenta la distancia radial es creciente y muy empinado cerca del eje de rotación, similar al comportamiento de un cuerpo rígido en rotación, tornándose luego y bruscamente en un comportamiento casi plano, donde la velocidad de rotación no cambia mucho con la distancia. En la descripción más simple de una rotación kepleriana, sin tomar en cuenta los efectos de los gradientes de presión, la velocidad circular se escalaría con la distancia radial  $r$  y con la masa contenida dentro de ese radio,  $M$ , según  $(M/r)^{1/2}$ . Si se considera sólo la masa visible de una galaxia, esta descripción falla para distancias suficientemente grandes, pues en esas regiones donde la masa visible ha caído notablemente, la forma de la curva de rotación continúa siendo plana. Este hecho dio lugar al planteamiento de la existencia de la materia oscura (de composición no del todo conocida hasta ahora) que constituiría aproximadamente el noventa por ciento de la masa de una galaxia típica, y cuya distribución se extendería a mayores distancias que la de la materia visible. De todas maneras, incluyendo la materia oscura,

el modelo kepleriano no describe de buena manera a las curvas de rotación, haciéndose necesario el considerar a un sistema galáctico como un fluido. Los primeros estudios del problema mostraron que cuando la materia visible es modelada como un gas Maxwelliano no colisional embebido en un halo de materia oscura conformada por partículas no colisionales con una muy alta dispersión de velocidades, aparecía de forma natural el potencial gravitacional que da lugar a curvas de rotación planas [7]. Por otro lado, se han construido potenciales con componentes de disco, halo y bulbo esferoidal que proveen de buenos ajustes a las curvas de rotación de galaxias espirales [8]. Otros modelos ajustan el campo gravitacional usando un modelo adecuado para la densidad superficial de discos galácticos, obteniendo de igual manera buenos resultados [9]. El fenómeno está presente también en galaxias elípticas y primeros modelos que las consideran como sistemas esferoidales oblatos con pequeña rotación dan como resultados curvas de rotación razonablemente planas [10]. Trabajos recientes en teoría de campos han alcanzado modelar las curvas de rotación, por ejemplo, al considerar que el acople fuerte entre la materia oscura y la visible puede ser descrito como una relación de desviación topológica, la cual es interpretada como una modificación de la ley de Newton [11]. Peebles [1] y Bertschinger [2] hicieron notar que el comportamiento de las curvas de rotación en la parte plana puede ser descrito con el escalamiento  $r^{-1/8}$  que se obtiene de soluciones con simetría esférica para distancias suficientemente grandes. Siguiendo esta idea, se plantea aquí una solu-

ción con simetría de disco que busque explicar no sólo el comportamiento general mencionado sino también las fluctuaciones respecto del mismo. Estas fluctuaciones, en las curvas de rotación provenientes de observaciones de galaxias espirales, tienen la forma de oscilaciones de amplitud variable, oscilaciones cuya frecuencia y amplitud disminuyen con la distancia radial.

A continuación se describe la construcción del modelo, luego los resultados y finalmente se realiza una discusión y se dan las conclusiones de este trabajo.

## 2. ECUACIONES DEL MODELO

Las ecuaciones de trabajo adoptadas para describir la dinámica de un fluido colisional no viscoso con interacción gravitacional son:

La ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + \vec{\nabla} \cdot (\rho\vec{v}) = 0, \quad (1)$$

las ecuaciones de Euler:

$$\frac{d}{dt}\vec{v} + \frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p = \vec{g}, \quad (2)$$

y la ecuación del flujo de energía:

$$\frac{d}{dt}(p\rho^{-\gamma}) = 0, \quad (3)$$

donde  $\rho$  es la densidad,  $\vec{v}$  es el vector velocidad,  $p$  es la presión,  $\gamma$  es el índice politrópico y  $\vec{g}$  es la aceleración gravitatoria, la cual, como gradiente de la solución de la ecuación de Poisson, tiene la siguiente expresión:

$$\vec{g} = G\vec{\nabla} \int \frac{\rho_T(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3\vec{r}', \quad (4)$$

$$\rho_T = \rho + \rho_{NC};$$

donde  $\rho_{NC}$  es la densidad de la materia no colisional.

Se busca construir un modelo autosimilar, es decir que sea invariante en forma y apariencia en todas las escalas, tanto espaciales como temporales. Esto se logra al adoptar los resultados del modelo cosmológico estándar para tiempos suficientemente grandes posteriores al comienzo de la expansión. Bajo el régimen de esta expansión homogénea de Hubble, la densidad media del universo, llamada densidad de Einstein-De Sitter, evoluciona con el tiempo según la forma:

$$\rho_H(t) = \frac{1}{6\pi Gt^2}, \quad (5)$$

Por otro lado, las fluctuaciones de la densidad, que crecen como  $t^{2/3}$ , originan centros de condensación locales que hacen que sucesivas capas concéntricas alrededor de ellos se alejen de la expansión general. De modo que una de estas capas, que inicialmente se está expandiendo siguiendo el flujo de Hubble, llega a frenarse y comienza un movimiento contrario de colapso hacia el centro de

condensación. Según la teoría del modelo estándar, el radio de retorno de las capas de masa colapsantes obedece el siguiente comportamiento con el tiempo:

$$r_{ta}(t) = \tau(t)^{8/9} \propto t^{8/9}. \quad (6)$$

Lo que se propone en la construcción del presente modelo es que estas capas colapsantes dan lugar a la formación de galaxias y entonces, al margen de considerar otros efectos estructurales y dinámicos producidos por procesos tales como los de formación estelar, disipativos y otros debidos a la presencia de campos magnéticos, el modelo debería representar de buena manera los rasgos generales de las galaxias normales.

Se ve, por lo tanto, que la normalización de las variables en términos del radio de retorno y de la densidad de Einstein-De Sitter es muy adecuada. Tal normalización en coordenadas esféricas es la siguiente:

a. Posición:

$$\vec{R}(\vec{r}, t) = (\lambda, \theta, \phi), \quad \lambda = \frac{r}{r_{ta}(t)}, \quad (7)$$

b. Velocidad:

$$\vec{v}(\vec{r}, t) = \frac{r_{ta}(t)}{t}\vec{V}(\lambda, \theta, \phi), \quad (8)$$

c. Densidad:

$$\rho(\vec{r}, t) = \rho_H(t)D(\lambda, \theta, \phi), \quad (9)$$

d. Presión:

$$p(\vec{r}, t) = \rho_H(t)\left(\frac{r_{ta}(t)}{t}\right)^2 P(\lambda, \theta, \phi), \quad (10)$$

Al ser el radio de retorno la única escala espacial función del tiempo, el sistema resulta autosimilar, es decir, dada la escala fija  $\lambda$ , es invariable en forma y apariencia para todas las escalas  $r = \lambda\tau^{8/9}$ .

Con las variables así normalizadas, las ecuaciones (1), (2) y (3) toman las siguientes formas adimensionales:

$$\vec{\nabla}_{\vec{R}} \cdot (D\vec{V}) - 2D - \frac{8}{9}\lambda D' = 0,$$

$$\vec{V} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{R}}\vec{V} - \frac{1}{9}\vec{V} - \frac{8}{9}\lambda\vec{V}' + \frac{1}{D}\vec{\nabla}_{\vec{R}}P =$$

$$\frac{2}{9}\vec{\nabla}_{\vec{R}} \int \frac{D_T(\vec{R}'')}{|\vec{R} - \vec{R}''|} d^3\vec{R}'',$$

$$\vec{V} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{R}}\left(\frac{P}{D}\right) - \frac{2}{9}\frac{P}{D} - \frac{8}{9}\lambda\left(\frac{P}{D}\right)' + (\gamma - 1)\frac{P}{D}\vec{\nabla}_{\vec{R}} \cdot \vec{V} = 0, \quad (11)$$

donde las primas indican derivadas parciales respecto de  $\lambda$ .

Se introducen las siguientes definiciones:

$$\begin{aligned}
\chi &= \cos \theta, \quad \vec{V} = (V_\lambda, V_\theta, V_\phi), \\
u_\lambda &= V_\lambda, \quad u_\theta = (1 - \chi^2)^{1/2} V_\theta, \\
u_\phi &= \frac{V_\phi}{(1 - \chi^2)^{1/2}}, \quad \eta = \frac{P}{D}, \\
Z &= \int \frac{D_T(\vec{R}'')}{|\vec{R} - \vec{R}''|} d^3 \vec{R}'';
\end{aligned} \tag{12}$$

y con éstas, las ecuaciones (11) en coordenadas esféricas son:

$$\begin{aligned}
(u_\lambda - \frac{8}{9}\lambda)D' + \frac{2}{\lambda}Du_\lambda + Du'_\lambda - 2D \\
- \frac{1}{\lambda}(D\frac{\partial}{\partial\chi}u_\theta + u_\theta\frac{\partial}{\partial\chi}D) + \frac{1}{\lambda}(D\frac{\partial}{\partial\phi}u_\phi + u_\phi\frac{\partial}{\partial\phi}D) = 0,
\end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned}
(u_\lambda - \frac{8}{9}\lambda)u'_\lambda - \frac{1}{9}u_\lambda - \frac{1}{\lambda}u_\theta\frac{\partial}{\partial\chi}u_\lambda + \frac{1}{\lambda}u_\phi\frac{\partial}{\partial\phi}u_\lambda \\
+ \eta' + \eta\frac{D'}{D} = \frac{2}{9}Z',
\end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned}
(u_\lambda - \frac{8}{9}\lambda)u'_\theta - \frac{1}{9}u_\theta - \frac{1}{\lambda}u_\theta\frac{\partial}{\partial\chi}u_\theta + \frac{1}{\lambda}(u_\phi\frac{\partial}{\partial\phi}u_\theta - \frac{\chi}{1-\chi^2}u_\theta^2) \\
- \frac{1-\chi^2}{\lambda}(\frac{\partial}{\partial\chi}\eta + \frac{\eta}{D}\frac{\partial}{\partial\chi}D) = -\frac{2}{9}\frac{1-\chi^2}{\lambda}\frac{\partial}{\partial\chi}Z,
\end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned}
(u_\lambda - \frac{8}{9}\lambda)u'_\phi - \frac{1}{9}u_\phi + \frac{1}{\lambda}u_\phi\frac{\partial}{\partial\phi}u_\phi - \frac{1}{\lambda}u_\theta(\frac{\partial}{\partial\chi}u_\phi - \frac{\chi}{1-\chi^2}u_\phi) \\
+ \frac{1}{\lambda(1-\chi^2)}(\frac{\partial}{\partial\phi}\eta + \frac{\eta}{D}\frac{\partial}{\partial\phi}D) = \frac{2}{9}\frac{1}{\lambda(1-\chi^2)}\frac{\partial}{\partial\phi}Z,
\end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned}
(u_\lambda - \frac{8}{9}\lambda)\eta' - \frac{2}{9}\eta - \frac{1}{\lambda}u_\theta\frac{\partial}{\partial\chi}\eta + \frac{1}{\lambda}u_\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\eta \\
+ (\gamma - 1)\eta(\frac{2}{\lambda}u_\lambda + u'_\lambda - \frac{1}{\lambda}\frac{\partial}{\partial\chi}u_\theta + \frac{1}{\lambda}\frac{\partial}{\partial\phi}u_\phi) = 0.
\end{aligned} \tag{17}$$

### 3. SOLUCIONES

#### 3.1. Aproximación radial

En esta aproximación se hallan las soluciones de las ecuaciones (13—17) para valores de  $\lambda$  suficientemente grandes. Para estos valores, dichas ecuaciones se reducen a las formas:

$$\begin{aligned}
\lambda D' + \frac{9}{4}D &= 0, \\
-\frac{8}{9}\lambda u'_\lambda - \frac{1}{9}u_\lambda + \eta' + \eta\frac{D'}{D} &= \frac{2}{9}Z', \\
\lambda u'_\theta + \frac{1}{8}u_\theta &= 0, \\
\lambda u'_\phi + \frac{1}{8}u_\phi &= 0, \\
\lambda\eta' + \frac{1}{4}\eta &= 0,
\end{aligned} \tag{18}$$

Las soluciones de este conjunto son:

$$\begin{aligned}
D^r &= D_0\lambda^{-9/4}, \quad Z^r = 18(\beta_g v_0)^2\lambda^{-1/4}, \\
u_\lambda^r &= v_0\sigma_\lambda\lambda^{-1/8} - v_0^2\lambda_0^2\lambda^{-5/4}, \\
u_\phi^r &= v_0\lambda^{-1/8}, \quad u_\theta^r = v_0\sigma_\theta\lambda^{-1/8}, \\
\eta^r &= \eta_0\lambda^{-1/4}.
\end{aligned} \tag{19}$$

Estas soluciones están expresadas en términos de parámetros dinámicos para valores de  $\lambda$  suficientemente grandes, los cuales se describen a continuación:

- i.  $\beta_g$  es el parámetro de soporte rotacional, definido como el cociente entre la aceleración gravitatoria y la aceleración centrífuga. Si  $v_c(r)$  es la velocidad circular del fluido a la distancia radial  $r$  y  $m(r)$  la masa total dentro de ese radio. La expresión para el cuadrado de  $\beta_g$  es la siguiente:

$$\beta_g^2 = \frac{g}{g_\phi} = \frac{Gm(r)}{v_c(r)^2 r} = \frac{32\pi D_0(1+\varepsilon)}{27 v_0^2}, \tag{20}$$

donde  $\varepsilon$  es el cociente entre la masa de la materia no colisional y la masa del gas colisional ( $\varepsilon \approx 9$ ).

- ii.  $\beta_p$  es el cociente entre la aceleración del gradiente de presión radial y la aceleración centrífuga. La expresión para su cuadrado es:

$$\beta_p^2 = -\frac{r\frac{\partial}{\partial r}p(r)}{v_c(r)^2\rho(r)} = \frac{5}{2}\frac{\eta_0}{v_0^2}. \tag{21}$$

- iii. El parámetro  $\chi_0^2$  da una medida de la combinación de los efectos gravitacionales y de los gradientes de presión:

$$\chi_0^2 = \beta_g^2 - \beta_p^2 \tag{22}$$

- iv.  $\sigma_\lambda$  y  $\sigma_\theta$  comparan las amplitudes de los movimientos radiales y polares con la amplitud del movimiento circular, respectivamente.

- v. Adicionalmente se define un parámetro,  $\Omega_0$ , que mide el grado en el que el efecto del segundo término en  $u_\lambda^r$  se aparta del efecto del primero:

$$\chi_0^2 = \frac{9}{32}(\Omega_0^2 + \sigma_\lambda^2). \tag{23}$$

#### 3.2. Equilibrio Hidrostático

Como una simplificación del modelo se adoptan condiciones de equilibrio hidrostático en las direcciones  $\hat{\theta}$  y  $\hat{\phi}$ , ésto permite anular la suma de las componentes de las fuerzas gravitacionales y de gradientes de presión en esas direcciones:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \chi} \eta + \frac{\eta}{D} \frac{\partial}{\partial \chi} D - \frac{2}{9} \frac{\partial}{\partial \chi} Z &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial \phi} \eta + \frac{\eta}{D} \frac{\partial}{\partial \phi} D - \frac{2}{9} \frac{\partial}{\partial \phi} Z &= 0. \end{aligned} \quad (24)$$

Por otro lado, no se consideran condiciones de equilibrio hidrostático en la dirección radial; éste se daría si  $\chi_0^2 = 0$ .

Con esta propuesta, las ecuaciones (15) y (16) se reducen a las formas:

$$OpV_\theta = 0, \quad OpV_\phi = 0, \quad (25)$$

$$Op = (u_\lambda - \frac{8}{9}\lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda} - \frac{1}{9} + \frac{1}{\lambda} (u_\phi \frac{\partial}{\partial \phi} - u_\theta \frac{\partial}{\partial \chi}).$$

Quiere decir que, bajo las condiciones de equilibrio hidrostático asumidas, las soluciones para  $V_\theta$  y para  $V_\phi$  son idénticas a menos de un factor constante. Es inmediato que este factor es  $\sigma_\theta$ :

$$V_\theta = \sigma_\theta V_\phi. \quad (26)$$

### 3.3. Aproximación Lineal

En este punto, la única ecuación necesaria para la obtención de la velocidad circular es (25). Como siguiente aproximación se propone expresar el operador  $Op$  en términos de los resultados de la aproximación radial:

$$Op \rightarrow Op^r = (u_\lambda^r - \frac{8}{9}\lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda} - \frac{1}{9} + \frac{1}{\lambda} (u_\phi^r \frac{\partial}{\partial \phi} - u_\theta^r \frac{\partial}{\partial \chi}). \quad (27)$$

Definiendo la variable  $u$  como

$$u = \lambda^{-9/8}, \quad (28)$$

se encuentra que las soluciones de la ecuación diferencial

$$Op^r V_\phi = 0 \quad (29)$$

tienen la forma general

$$\begin{aligned} V_\phi^m &= A_m u^{1/9} (\cos^2 g(u))^{1/18} \exp \left[ \frac{\sigma_\lambda}{9\Omega_0} g(u) \right] \\ &\times \exp \left[ -K_m \left( \frac{16\sigma_\theta}{9\Omega_0} g(u) + \chi \right)^2 - im \left( \frac{16}{9\Omega_0} g(u) - \phi \right) \right], \end{aligned} \quad (30)$$

donde

$$g(u) = \tan^{-1} \left\{ \frac{2v_0 \chi_0^2 u - \sigma_\lambda}{\Omega_0} \right\} \quad (31)$$

y  $m$  es entero.

La constante  $K_m$ , cuando positiva, sirve para regular el grado de achatamiento del sistema hacia el plano de rotación, mientras que  $m$  da el número de brazos espirales.

## 4. FÓRMULA PARA EL AJUSTE

Se adopta una forma de la solución correspondiente a una estructura de  $m$  brazos espirales:

$$V_\phi = A(u|\cos g|)^{1/9} e^{\frac{\sigma_\lambda}{9\Omega_0} g} e^{-K \left( \frac{16\sigma_\theta}{9\Omega_0} g + \chi \right)^2} \times$$

$$\left[ 1 + B e^{-\beta \left( \frac{16\sigma_\theta}{9\Omega_0} g + \chi \right)^2} \cos \left\{ m \left( -\frac{16}{9\Omega_0} g + \phi + \phi_0 \right) \right\} \right]. \quad (32)$$

Se propone la presencia de un fenómeno de pulsaciones, de manera que se hace el siguiente cambio en la frecuencia de las variaciones armónicas:

$$m \rightarrow m + \delta, \quad \delta \ll 1. \quad (33)$$

Por otro lado, se plantea que la solución de orden cero, con  $B = 0$ , representa el comportamiento medio de la velocidad circular correspondiente a  $\chi = 0$  (plano de simetría) e independiente de  $\phi$ , y que las fluctuaciones respecto de este valor medio están representadas por la solución de orden  $m$ , las cuales dependen de  $\chi$  y  $\phi$ , además de  $\lambda$ . A fin de simplificar el ajuste, se toma en estas fluctuaciones un valor medio  $\langle \chi \rangle = 1/2$ ; y con esta elección, los valores de  $v_0 \sigma_\theta$  corresponden al hemisferio superior  $0 \leq \chi \leq 1$ .

Con estas consideraciones y realizando el promedio en la variable angular  $\phi$ , la expresión resultante para la velocidad circular de rotación es la siguiente:

$$\begin{aligned} V_c = \langle V_\phi \rangle &= A(u|\cos g|)^{1/9} e^{\frac{\sigma_\lambda}{9\Omega_0} g} e^{-K \left( \frac{16\sigma_\theta}{9\Omega_0} g \right)^2} \times \\ &\left[ 1 + A_0 e^{-\beta \left( \frac{16\sigma_\theta}{9\Omega_0} g + \frac{1}{2} \right)^2} \cos \left( m \frac{16}{9\Omega_0} g + \varphi_0 \right) \right]. \end{aligned} \quad (34)$$

Dada una tabla de datos para los valores de la velocidad circular de rotación,  $y$ , versus los valores de la distancia radial,  $x$ , la forma a usar para los ajustes es la siguiente:

$$\begin{aligned} f(u) &= a_1 (a_2 u |\cos g|)^{1/9} e^{a_3 g/9} e^{-a_6 g^2} \times \\ &\left[ 1 + a_8 e^{-a_7 (g - a_5)^2} \cos(a_4 g + a_9) \right], \end{aligned} \quad (35)$$

$$g = g(u) = \tan^{-1}(a_2 u - a_3),$$

$$u = u(x) = (x + a_{10})^{-9/8}.$$

El parámetro  $a_{10}$  es introducido para considerar la posibilidad de que los datos  $x$  no tengan como origen al centro de la distribución.

Finalmente, los parámetros físicos se obtienen a partir de los parámetros del ajuste con las relaciones:

TABLA 1

Parámetros obtenidos con los ajustes a las curvas de rotación. Los valores están dados para  $m = 2$  y  $\tau = 1$ . Excepto los indicados con '\*', que pertenecen a la base de datos *co-hi*, todos los demás corresponden a la base de datos *optical* [5].

Galaxia	$\sigma_\lambda$	$\sigma_\theta$	$v_0$	$\Omega_0$	$\chi_0^2$	$A$	$A_0$	$K$	$\beta$	$\varphi_0$
NGC 2590	-0,007	-0,1	15,7	0,2	0,01	362,7	-0,3	1,1	7,9	-29,4
NGC 2841	0,001	-0,06	12,3	0,2	0,01	430,6	-6,1	10,1	35,5	-30,7
NGC 3521	-0,01	0,02	-49,2	-0,06	0,001	291,5	$-2 \times 10^4$	7,5	243,3	-58,0
NGC 4448	-0,01	0,5	14,6	0,2	0,006	314,7	0,002	0,1	-0,7	-28,2
NGC 4527	-0,001	-1,2	15,7	0,1	0,006	230,5	0,06	0,005	-0,06	-29,4
NGC 4565	0,01	-0,03	15,0	0,1	0,004	320,8	$4 \times 10^{14}$	180,2	208,7	19,1
NGC 4569	-0,003	-0,04	13,0	0,2	0,007	376,0	$2 \times 10^{14}$	47,1	324,9	17,8
NGC 5033	-0,07	-0,06	3,0	0,2	0,01	496,0	$-3 \times 10^4$	9,4	286,3	-24,9
NGC 891*	-0,003	-0,07	15,4	0,2	0,007	295,9	-0,2	3,0	10,5	-30,1
NGC 1068*	0,001	-0,007	60,8	0,03	0,0003	279,9	$1 \times 10^{15}$	56,7	179,7	12,1
NGC 2841*	0,0006	-0,06	12,2	0,2	0,01	436,5	-6,1	10,0	37,1	-30,6
NGC 4527*	-0,001	0,2	23,2	0,1	0,004	235,7	0,05	-0,1	-1,2	-28,3

TABLA 2

Valores del parámetro  $a_{10}$  (en unidades de *kpc*) para los ajustes a las curvas de rotación de las galaxias de la Tabla 1.

NGC 2590	NGC 2841	NGC 3521	NGC 4448	NGC 4527	NGC 4565
2.9	1.9	1.8	2.4	2.2	2.6
NGC 4569	NGC 5033	NGC 891*	NGC 1068*	NGC 2841*	NGC 4527*
2.6	1.0	3.1	4.6	2.0	4.0

## 6. DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

El modelo desarrollado se ajusta de modo razonable con los datos de curvas de rotación galácticas. Según éste, el comportamiento medio de la velocidad circular de rotación, con una forma empinada cerca del centro de la distribución y con una forma plana al alejarse luego de aquél, sería debido principalmente a la preponderancia de los movimientos polares de los elementos del fluido hacia y desde el plano de simetría galáctico en el primer caso, y al efecto contrario en el segundo, cuando, para valores suficientemente grandes de la variable radial  $\lambda$ , la forma plana es explicada por la lenta variación de la velocidad con tal variable, según  $\lambda^{-1/8}$ . Las fluctuaciones respecto de este comportamiento medio serían explicadas por dos efectos: el efecto de un fenómeno oscilatorio de pulsaciones provocado por las oscilaciones armónicas de las ondas de densidad que originan también los brazos espirales. La frecuencia de estas oscilaciones decrece con la variable radial según le forma de la función  $g(u)$  (ec. 31). Esta función se presenta como una variable natural del problema; la velocidad circular como función de  $g$  tiene oscilaciones armónicas de frecuencia constante, frecuencia cuyo valor está definido por el valor del parámetro  $\Omega_0$ . Según la Tabla 1, los valores de  $\Omega_0$  son del orden

$$\begin{aligned} \Omega_0 &= \left(\frac{m}{2}\right) \frac{32}{9a_4}, & \frac{v_0}{\tau} &= \left(\frac{m}{2}\right)^{-1} \frac{a_2 a_4}{2(1+a_3^2)}, \\ \sigma_\theta &= -\left(\frac{m}{2}\right) \frac{1}{a_4 a_5}, & \sigma_\lambda &= \left(\frac{m}{2}\right) \frac{32a_3}{9a_4}, \\ A &= a_1 a_2^{1/9}, & A_0 &= a_8, & \varphi_0 &= a_9, \\ K &= 4a_6 a_5^2, & \beta &= 4a_7 a_5^2. \end{aligned} \quad (36)$$

## 5. RESULTADOS

Se aplica la fórmula de ajuste (35) a datos de curvas de rotación obtenidas de las observaciones por Sofue Y. [5]. Los ajustes son realizados utilizando el método de Levenberg-Marquardt [4] con una precisión de  $10^{-3}\%$  en el parámetro  $\chi^2$ . Estos datos junto con las correspondientes curvas de ajuste son mostrados en las figuras 1 y 2 para doce galaxias. Los parámetros obtenidos para estas galaxias están contenidos en la Tabla 1 y en la Tabla 2 se presentan los valores obtenidos para el parámetro  $a_{10}$ .

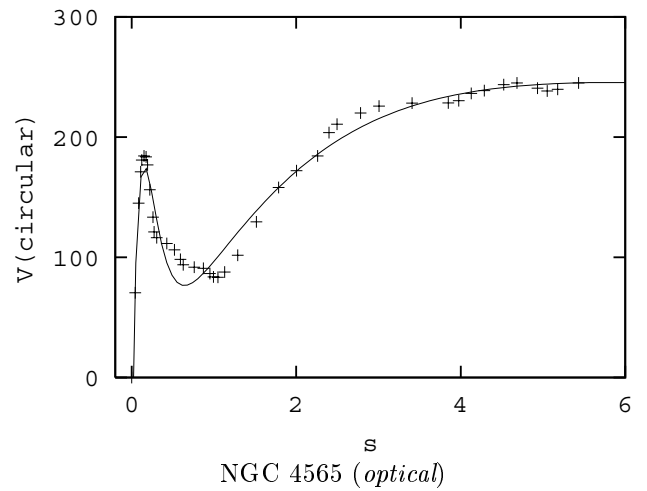
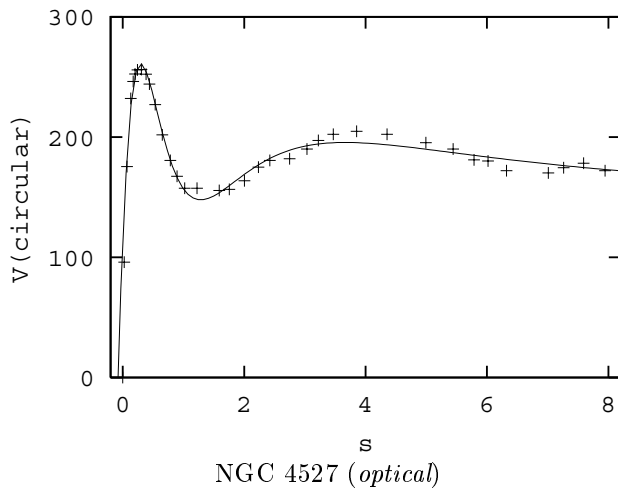
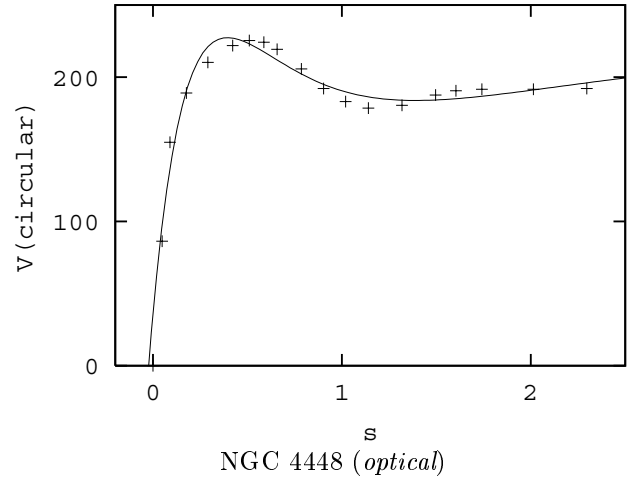
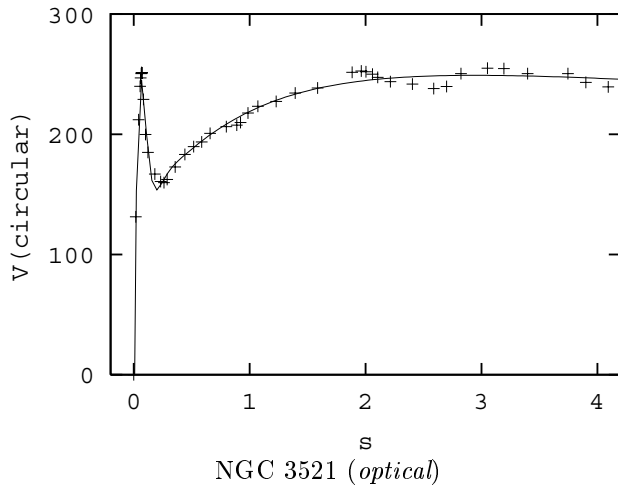
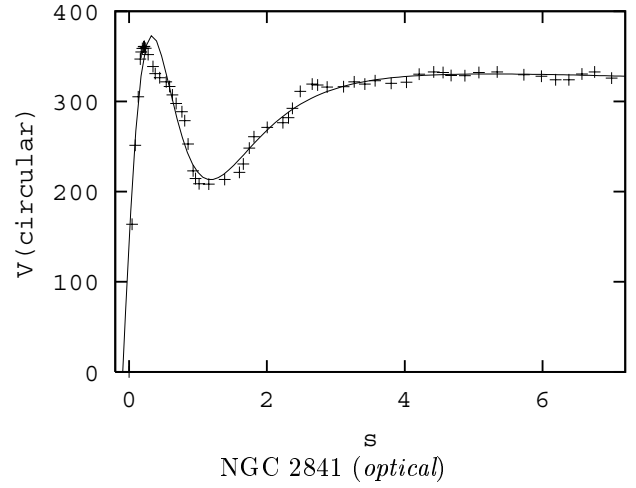
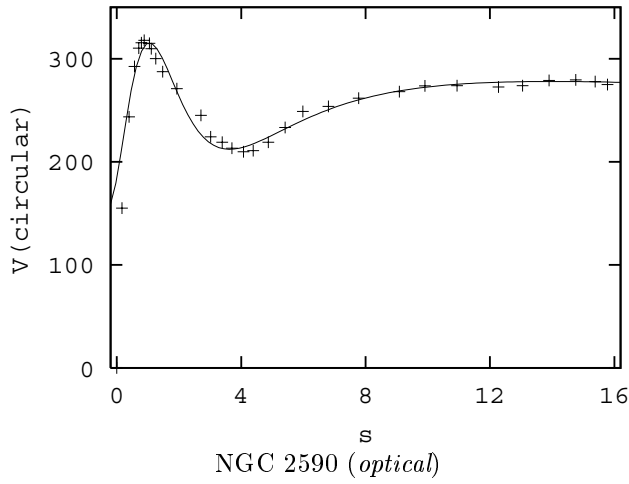


Figura 1. Datos de curvas de rotación y curvas de ajuste para distintas galaxias. Las unidades de la velocidad circular de rotación son  $km/s$ . 's' representa la variable radial y sus unidades son  $kpc$ . Se indica el tipo de datos utilizados, *optical* en estos casos [5].

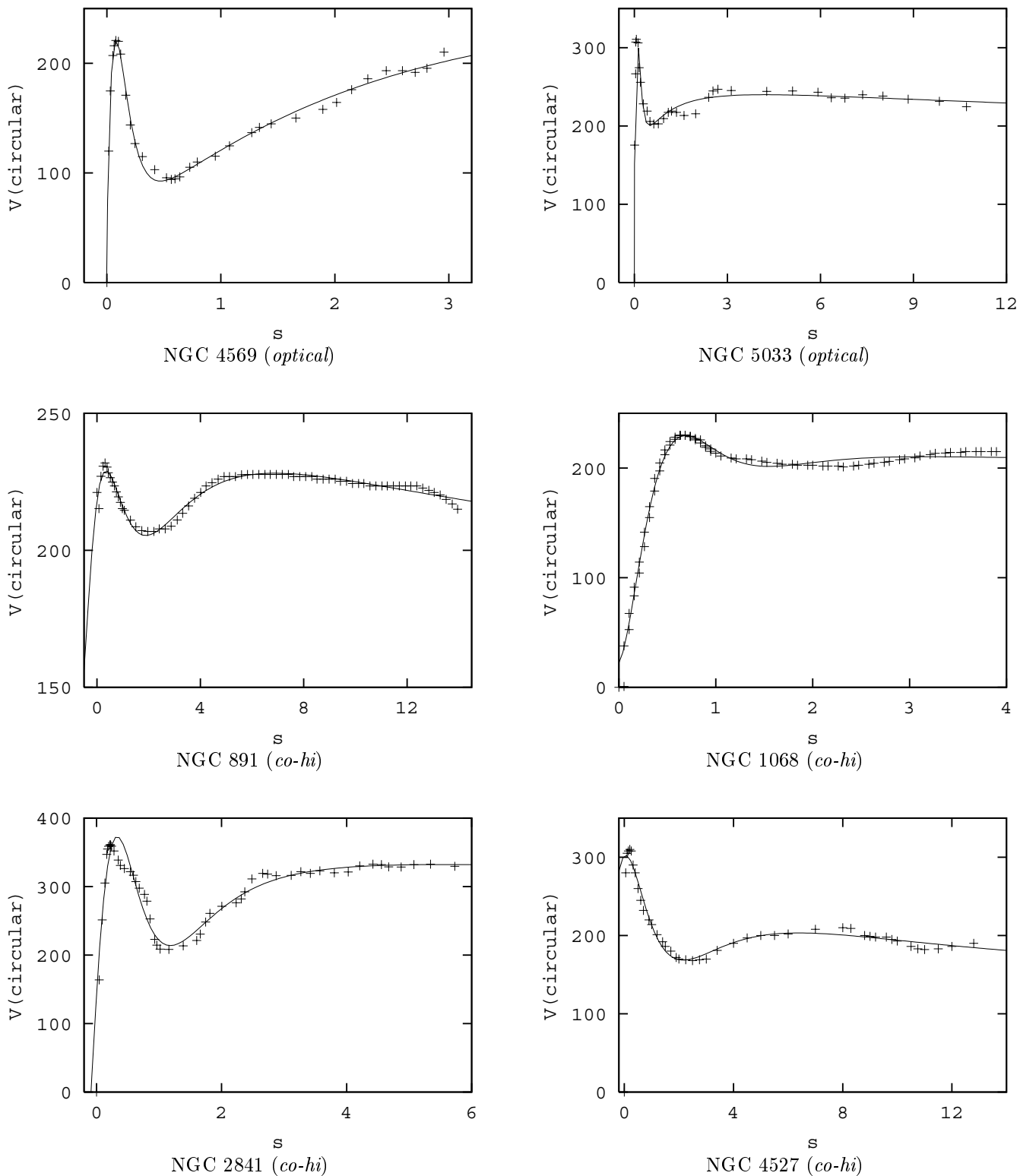


Figura 2. Datos de curvas de rotación y curvas de ajuste para distintas galaxias. Las unidades de la velocidad circular de rotación son  $km/s$ . 's' representa la variable radial y sus unidades son  $kpc$ . Se indica la el tipo de datos utilizados, *optical* o *co-hi* [5].

de 0,1 en casi todos los casos, lo cual tal vez permitiría sugerir que éste es un parámetro más o menos estable de una galaxia a otra. El otro efecto que explicaría las fluctuaciones estaría gobernado por los movimientos polares a través de una amplitud variable de las fluctuaciones oscilatorias. Esta amplitud, como función de  $g$  tiene una forma exponencial, de tipo creciente o decreciente en algunos casos, y de tipo gaussiano en otros. Se encuentra que a mayores valores del parámetro  $\sigma_\theta$ , que cuantifica el orden de magnitud de los movimientos polares respecto del movimiento circular, mayor es la amplitud de las oscilaciones. Los valores de  $\sigma_\theta$  no se muestran estables de una galaxia a otra; según la Tabla 1, en algunos casos el orden de la velocidad polar es cien veces menor que la velocidad circular y en otros llega a ser comparable a ésta.

Los valores de  $\sigma_\lambda$  mostrados en la Tabla 1 son, en general, menores que los de  $\sigma_\theta$ , y aun en el caso en que éstos son comparables, el efecto de los movimientos radiales es mucho menor al efecto de los movimientos polares en la estructura de las curvas de rotación estudiadas. Los bajos valores de  $\sigma_\lambda$  y  $\Omega_0$  determinan pequeños valores del parámetro  $\chi_0^2$ , lo que indicaría que el equilibrio hidrostático en la dirección radial en los objetos bajo estudio estaría establecido como muy buena aproximación.

En lo que se refiere al proceso de la obtención de los ajustes, éste es muy sensible a las variaciones de los valores de los parámetros y se dificulta por el alto número de parámetros a modificar. Como ejemplo se tienen los casos de dos galaxias, NGC 4527 y NGC 2841 para los cuales se disponían de ambos tipos de datos, *optical* y *co-hi*. En el primer caso se encuentran grandes diferencias en los valores de los parámetros para los ajustes a uno y otro tipo de datos (véase Tabla 1) a pesar de que los mismos se muestran razonables en las figuras

correspondientes (véanse figuras 1 y 2). En el segundo caso, por el contrario, se encuentra un excelente acuerdo entre los resultados de los ajustes de ambos tipos de datos. Finalmente, se encuentra un resultado no esperado en los ajustes realizados, pues el parámetro  $a_{10}$  que define el cero de la variable radial y por tanto debería tomar valores suficientemente pequeños, toma valores muy significativos en todos los casos (véanse la Tabla 2 y figuras 1 y 2). En este punto no se puede dar una explicación a este problema y queda como objeto de estudio posterior.

#### REFERENCIAS

- [1] Peebles, P. J. E. 1993, *Principles of Physical Cosmology* (Princeton: Princeton University Press).
- [2] Bertschinger, E. 1985, *Ap. J. (Supplement Series)*, 58, 39.
- [3] Urzagasti, D. 2001, *Revista Boliviana de Física*, N°7, Vol.1, 34.
- [4] Press, W. H., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T., Flannery, B. P., *Numerical Recipes in FORTRAN, Second Edition*, Cambridge University Press, 1992.
- [5] Sofue, Y., 1996, 1997. [www.ioa.s.u-tokyo.ac.jp/~sofue/rotation/data.htm](http://www.ioa.s.u-tokyo.ac.jp/~sofue/rotation/data.htm).
- [6] Burbidge, E. M., *The Evolution of Spiral Structure, Structure and Evolution of the Galaxy*, editado por L. N. Mavridis, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht-Holland, 1971.
- [7] R. Cowsik & P. Ghosh, *Towards a Physical Model for Galactic Rotation Curves*, *J. Astrophys. Astr.* (1986), 7, 17-28.
- [8] Valluri, M., *Ap.J.*, 430; 101-106, 1994.
- [9] M. Ubriaco and J. Tharrats, *Ap & SS* (1984) 102, 81-95.
- [10] M. Petrou, *M.N.R.A.S.* (1983) 202, 1209-1219.
- [11] A. A. Kirillov and D. Turaev, *M.N.R.A.S.*, 371, L31-L35 (2006).
- [12] Catinella et al., *Template Rotation Curves for Disk Galaxies*, *Ap.J.*, v1, Dec 2005.