Revista Boliviana de Física **11**, 126–132 (2005)

UNA EQUIVOCACIÓN COMÚN EN EL CÁLCULO DE PROPAGACIÓN DE ERRORES
(Um Engano Comum em Cálculo de Propagação de Erros)
(A Common Mistake in Calculation of Error Propagation)

Wilton Pereira da Silva (DF)[1], Cleide M. D. P. S. e Silva (DF),
Antônio G. B. Lima (DEM), Diogo D. P. S. e Silva (DME)
Universidade Federal de Campina Grande, Campina Grande, 58109-970, PB, Brasil
Cleiton D. P. S. e Silva
Instituto Tecnológico de Aeronáutica (ITA), São José dos Campos, São Paulo, Brasil

RESUMEN

Este artículo discute la aplicación de las fórmulas usuales para la propagación de errores en las cuatro operaciones aritméticas normalmente utilizadas en cursos introductorias de Física Experimental. El artículo muestra dos resultados discrepantes, provenientes del uso de tales fórmulas en un mismo conjunto de datos. Este conjunto de datos corresponde a un experimento sobre resortes unidos, en el cual se desea determinar la constante elástica del resorte equivalente. Se identifica la causa de la discrepancia y esa identificación sugiere que se debe evitar el uso de tales fórmulas. La fórmula general para propagación de errores es utilizada en la solución correcta del problema, y las dificultades relativas a su uso durante un curso inicial de Física Experimental son analizadas. Se sugiere una forma alternativa para el cálculo del error propagado que, al mismo tiempo, elimina el problema de resultados discrepantes y esquiva las dificultades en el uso de la fórmula general.

RESUMO

Este artigo discute a aplicação das fórmulas usuais para a propagação de erros nas quatro operações aritméticas, normalmente utilizadas em cursos introdutórios de Física Experimental. O artigo mostra dois resultados discrepantes, provenientes do uso de tais fórmulas em um mesmo conjunto de dados. Tal conjunto de dados refere-se a um experimento sobre associação de molas, no qual se deseja determinar a constante de elasticidade da mola equivalente. A causa da discrepância é identificada, e essa identificação sugere que tais fórmulas devem ser evitadas. A fórmula geral para propagação de erros é utilizada na solução correta do problema, e as dificuldades relativas ao seu uso durante um curso inicial de Física Experimental são analisadas. É sugerida uma forma alternativa para o cálculo do erro propagado que, ao mesmo tempo, elimina o problema de resultados discrepantes e contorna as dificuldades no uso da fórmula geral.

ABSTRACT

This paper discusses the application of formulas applied to error propagation in the four arithmetic operations, usually used in introductory courses about Experimental Physics. The paper shows two differing results, referring to the use of such formulas in a same data set. This data set refers to an experiment about association of springs, in which one wants to determine the constant of elasticity of the equivalent spring. The cause of the discrepancy is identified, and that identification suggests that such formulas should be avoided. The general formula for error propagation is used in the correct solution of the problem, and the difficulties relative to its use during an initial course of Experimental Physics are analyzed. An alternative form of calculating the error propagated is suggested, and at the same time, it eliminates the problem of differing results and the difficulties in the use of the general formula.

1. INTRODUCCIÓN

En eventos en que participan profesores de Física, tales como congresos y encuentros, conversaciones informa-

[1]Email: `wiltonps@uol.com.br`

TABLA 1

Elongación y fuerza aplicada al resorte 1.

$X(cm)$	2,5	4,4	7,6	10,4	12,2	15,0	17,5	20,1
$F(gf)$	15,0	30,0	45,0	60,0	75,0	90,0	105,0	120,0

TABLA 2

Elongación y fuerza aplicada al resorte 2.

$X(cm)$	5,8	11,5	17,0	22,9	28,1	34,5	38,7	45,4
$F(gf)$	15,0	30,0	45,0	60,0	75,0	90,0	105,0	120,0

les permiten constatar que, generalmente, la enseñanza de Física Experimental no tiene como pre-requisito un curso sobre tratamiento de datos experimentales. Esta constatación puede ser corroborada, por ejemplo, en [1, 2 e 3]. Normalmente, nociones sobre teoría de errores son presentadas de manera resumida al inicio del primer curso dedicado a la disciplina. La falta de una discusión más amplia y mas profunda sobre el tema lleva, muchas veces, a una cierta superficialidad en el análisis de datos experimentales, pudiendo provocar distorsiones que, pueden arraigarse de forma definitiva en el pensamiento de muchos alumnos. El problema de la falta de un conocimiento más sólido sobre tratamiento de datos se hace aún más evidente cuando los alumnos deben aplicar fórmulas de propagación de errores, en la determinación de parámetros provenientes de medidas efectuadas en laboratorio.

Este artículo aborda un tipo específico de problema relacionado a la enseñanza de propagación de errores, y tuvo su origen a partir de una sugerencia del primero de los autores a dos alumnos de un mismo curso. La sugerencia se refería a la secuencia de operaciones en un cálculo de propagación de errores, usando las mismas fórmulas y los mismos datos experimentales. Como los alumnos obtuvieron resultados diferentes para el error propagado, y ninguno de ellos detectó errores groseros en sus cálculos, se pidió una explicación razonable para la discrepancia. Como no la hubo, el problema fue planteado a todos los alumnos del grupo. Un nuevo fracaso hizo que el problema se extendiera por los cuatro profesores de la disciplina a los once grupos de ese período, con resultados análogos. Quedaba claro, entonces que el tema "propagación de errores" no estaba siendo abordado de forma satisfactoria en los cursos de Física Experimental I: no bastaba un texto inicial definiendo el tema (en el que eran mencionadas, superficialmente, ciertas restricciones), seguido de la deducción de las fórmulas para las operaciones aritméticas. Esto se hizo evidente a través del problema propuesto a los alumnos y, entonces, era necesario buscar alternativas para la enseñanza de este asunto, de lo que resultó este artículo.

2. EL EXPERIMENTO GENERADOR DEL PROBLEMA

El experimento, detallado en [4], consiste de dos resortes cuyas constantes elásticas previamente se determinan midiendo la elongación X en función del valor F de la fuerza aplicada en sus extremos. Se sugiere que el gráfico de F versus X se trace de tal modo que se destaque que se trata de rectas y que se pueda visualizar "cuán cerca" del origen del sistema de ejes pasa cada recta. Para cada conjunto de datos, se recomienda el uso del método de los mínimos cuadrados para determinar el valor medio de cada constante elástica y su desviación estándar. En esta fase inicial del experimento, se pide al alumno que calcule el valor de la constante elástica equivalente para los dos resortes unidos en serie. El experimento todavía tiene una fase final, con la toma de datos para los resortes asociados en serie, que no se detallará aquí porque el problema en cuestión es independiente de esa parte.

2.1. *Datos Obtenidos en el Experimento*

El experimento se realizó utilizando el kit KEM [5], que es un "Kit para Experimentos de Mecánica", utilizado en el laboratorio de Física Experimental I donde se detectó el problema relativo a la enseñanza de propagación de errores. Para efecto de la presentación de las medidas efectuadas, vamos a designar los dos resortes como 1 y 2. Los resultados obtenidos se presentan en las tablas 1 y 2.

Los datos de estas tablas se obtuvieron con cada resorte colgado en posición vertical. Inicialmente se colocó una masa de $50,0g$ en la bandeja colgada en su extremidad inferior. Esta masa busca minimizar el efecto de la propia masa del resorte y, a partir de ahí, se inicia el experimento, con incrementos de masa, de $15,0$ en $15,0g$. En este experimento se asume que los errores sistemáticos pueden despreciarse, de modo que los errores a ser considerados son los provenientes de fluctuaciones estadísticas. Para garantizar una cierta independencia en los valores obtenidos para las constantes elástica, se hicieron dos montajes distintos, uno para cada resorte. Hay que resaltar que, aquí, por comodidad, se utilizó el sistema técnico de unidades en el proceso de medición, por ser adecuado al ambiente del laboratorio.

2.2. *Análisis Preliminar de los Datos*

El análisis de los datos se hizo a través del software LAB Fit [6]. Una simple inspección gráfica o también el test t de Student [7] mostraría que es bastante razonable proponer, para los dos resortes, el modelo dado por la ley de Hooke (ver, por ejemplo, [8]):

$$F = KX, \tag{1}$$

donde K es la constante elástica. Aunque conceptualmente la variable independiente de este experimento sea la fuerza F aplicada en cada extremo del resorte, en todos los análisis que siguen se considerará a la variable X como independiente, obedeciendo el modelo dado por la Ec. (1). Ajustando la función de la Ec. (1) a los datos de las tablas (1) y (2), obtenemos:

$$\begin{aligned} K_1 &= (6,00 \pm 0,05) gf/cm, \quad \text{y} \\ K_2 &= (2,653 \pm 0,014) gf/cm. \end{aligned} \tag{2}$$

2.3. *Constante Elástica del Resorte Equivalente para dos Resortes Unidos en Serie*

Es simple demostrar que, si cada uno de los resortes obedece a la Ec. (1), entonces la constante elástica del resorte equivalente, K_{eq}, estará dada por (ver, por ejemplo, [9])

$$\frac{1}{K_{eq}} = \frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2}, \tag{3a}$$

o, también

$$K_{eq} = \frac{K_1 K_2}{K_1 + K_2}. \tag{3b}$$

Conforme veremos, aunque las Ecs. (3a) y (3b) sean equivalentes, desde el punto de vista matemático, presentan resultados diferentes para el error propagado, si no se toma cuidado.

3. FÓRMULAS PARA LA PROPAGACIÓN DE ERRORES EN LAS OPERACIONES ARITMÉTICAS

Aún cuando el tema de la "propagación de errores" sea abordado de forma satisfactoria en los libros de texto sobre teoría de errores (ver, por ejemplo, [10, 11, 12, 13 y 14]), en algunos cursos iniciales de Física Experimental el tema se reduce a las cuatro operaciones aritméticas y, normalmente, el tratamiento del tema es bastante resumido. Un resumen típico puede encontrarse en [15]. Para las cuatro operaciones aritméticas, las fórmulas de propagación son deducidas suponiendo que se tienen dos medidas independientes dadas por

$$X = \bar{X} \pm \sigma_{Xm} \quad \text{y} \quad Y = \bar{Y} \pm \sigma_{Ym} \tag{4}$$

que, por simplicidad, se consideran como positivas. En la Ec. (4) $\bar{X}$ y $\bar{Y}$ son los valores medios de las medidas X y Y, σ_{Xm} y σ_{Ym} son sus respectivas incertidumbres. Entonces, las operaciones aritméticas entre esas medidas se pueden realizar conforme veremos a continuación.

3.1. *Suma y Resta*

Estas operaciones se pueden sintetizar, para el cálculo de la desviación máxima absoluta y de la desviación estándar, como sigue:

$$OP = \overline{OP} \pm (\sigma_{Xm} + \sigma_{Ym}) \tag{5a}$$

y

$$OP = \overline{OP} \pm \sqrt{\sigma_{Xm}^2 + \sigma_{Ym}^2}, \tag{5b}$$

donde "OP" simboliza la operación (suma o resta) y "$\overline{OP}$" representa la operación con los valores medios de las medidas. A pesar de ser conservativa con relación al error propagado, la Ec. (5a) en general solo es utilizada con fines didácticos y, en el caso de medidas independientes, debe ser relegada en favor de la desviación estándar propagada, dada por la Ec. (5b), que substituye la suma de los módulos de las desviaciones por la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de tales desviaciones.

3.2. *Multiplicación y División*

Tales operaciones pueden resumirse, en cuanto a las desviaciones máxima y estándar, por las siguientes expresiones:

$$OP = \overline{OP} \pm \overline{OP}\left(\frac{\sigma_{Xm}}{X} + \frac{\sigma_{Ym}}{Y}\right) \tag{6a}$$

y

$$OP = \overline{OP} \pm \overline{OP}\sqrt{\left(\frac{\sigma_{Xm}}{X}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{Ym}}{Y}\right)^2}, \tag{6b}$$

donde, nuevamente, "OP' y "$\overline{OP}$" representan, respectivamente, la operación (multiplicación o división) y la operación con los valores medios. Estas fórmulas, dadas por las Ecs. (5a), (5b), (6a) y (6b), están presentes en la mayoría de los libros de texto sobre teoría de errores (ver, por ejemplo, las páginas 50, 53, 60 y 61 de la referencia [14]). Igual que la Ec. (5a), la Ec. (6a) define una regla provisional, de cuño didáctico y, en el caso de medidas independientes, debe ser relegada en favor de la Ec. (6b), que substituye la suma de las desviaciones relativas por la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de estas desviaciones. En la sección 5.1, se hará un estudio más general para los límites de validez de cada una de estas fórmulas relativas al error de propagación en la división.

4. CÁLCULO DE LA CONSTANTE ELÁSTICA PARA LA ASOCIACIÓN EN SERIE

Como se mostrará, fueron utilizadas las fórmulas dadas en las Ecs. (5b) y (6b) y los resultados obtenidos para las constantes elásticas de los resortes, dadas en la Ec. (2) para el cálculo de la constante elástica equivalente de los dos resortes asociados en serie. Obsérvese que hay dos posibles caminos distintos para determinar, paso a paso, la constante elástica equivalente: mediante las Ecs. (3a) y (3b).

4.1. *Formulación por el Camino 1: Uso de la Ec. (3a)*

Con el uso de la Ec. (3a) podemos escribir:

$$\frac{1}{K_{eq}} = \frac{1}{6{,}00 \pm 0{,}05} + \frac{1}{2{,}653 \pm 0{,}014} \tag{7}$$

Recordando que el número exacto 1 es lo mismo que (1 ± 0), las dos divisiones en el segundo miembro de la Ec. (7) se pueden realizar de acuerdo con la Ec. (6b). Luego podemos realizar la suma obtenida por el procedimiento anterior a través de la Ec. (5b) para, finalmente, reutilizar la Ec. (6b) para invertir el resultado obtenido. Finalmente, encontramos:

$$K_{eq} = (1{,}840 \pm 0{,}008) gf/cm. \tag{8}$$

4.2. *Formulación por el Camino 2: Uso de la Ec. (3b)*

Con el uso de la Ec. (3b) y los resultados ya mencionados para K_1 y K_2, podemos escribir:

$$K_{eq} = \frac{(6{,}00 \pm 0{,}05)(2{,}653 \pm 0{,}014)}{(6{,}00 \pm 0{,}05) + (2{,}653 \pm 0{,}014)} \tag{9}$$

Luego, usando la Ec. (6b) para realizar la multiplicación en el numerador y la Ec. (5b) para la adición en el denominador, seguida de la reutilización de la Ec. (6b) para efectuar la operación final de división, obtenemos:

$$K_{eq} = (1{,}840 \pm 0{,}021) gf/cm. \tag{10}$$

En todos los cálculos efectuados en los ítems 4.1 y 4.2 trabajamos con exceso de dígitos, haciendo un sólo redondeo al final de la secuencia de operaciones. Pero la desviación estándar del valor medio de K_{eq} obtenido en el ítem 4.1 es significativamente diferente del valor calculado en este ítem 4.2. En verdad, el último valor obtenido para la desviación es casi el triple del primero. Una discusión sobre el por qué de esta discrepancia y también sobre los cuidados que se deben tomar en la utilización de la Ec. (6b) se hará a continuación. Además de ello, se propondrá el uso de alternativas más generales en el cálculo de propagación de errores.

5. DISCUSIONES

Un análisis más cuidadoso de la sección 4 indica que el resultado obtenido en el ítem 4.1 (camino 1) es el correcto en tanto que aquel obtenido en 4.2 (camino 2) es errado. Para comprender esto es necesario investigar la restricción que debería haber sido impuesta en la utilización de la Ec. (6b): "*...suponiendo que se tengan dos medidas independientes dadas por...*". El significado de esta frase es muy importante en la propagación de errores, y por eso ella se investigará en detalle. En el caso de la división, en que tenemos $OP = X/Y$, el resultado para el error propagado, dado por la Ec. (6a), se obtiene calculando los límites inferior y superior de la operación, con aproximación de primer orden (lo que requiere pequeñas desviaciones relativas), a través del siguiente razonamiento:

Límite inferior:

$$LI = \frac{\overline{X} - \sigma_{Xm}}{\overline{Y} - \sigma_{Ym}} \approx \frac{\overline{X}}{\overline{Y}} - \frac{\overline{X}}{\overline{Y}} \left(\frac{\sigma_{Xm}}{\overline{X}} + \frac{\sigma_{Ym}}{\overline{Y}} \right) \tag{11a}$$

Límite superior:

$$LS = \frac{\overline{X} + \sigma_{Xm}}{\overline{Y} - \sigma_{Ym}} \approx \frac{\overline{X}}{\overline{Y}} + \frac{\overline{X}}{\overline{Y}} \left(\frac{\sigma_{Xm}}{\overline{X}} + \frac{\sigma_{Ym}}{\overline{Y}} \right). \tag{11b}$$

Obviamente, los resultados obtenidos en las Ecs. (11a) y (11b) posibilitan escribir la Ec. (6a), obtenida para a división, como sigue:

$$\text{Desvío Máximo Absoluto:} \quad \frac{1}{2}|LS - LI| \tag{11c}$$

$$\text{Valor Medio:} \quad \frac{\overline{X}}{\overline{Y}} = \frac{1}{2}(LS + LI) \tag{11d}$$

Naturalmente, la Ec. (6b) puede obtenerse por la simple sustitución de la suma de las desviaciones relativas por la suma de los cuadrados de estas desviaciones.

Por otro lado, una reflexión más atenta sobre las Ecs. (11a) y (11b) permite afirmar que el razonamiento allí utilizado presupone que el numerador y el denominador pueden asumir valores, uno independientemente del otro. Esto porque, cuando uno asume el mayor valor para la variable, el otro asume el menor: "*el numerador debe ser independiente del denominador*". Obviamente esto no se aplica a la fórmula para la constante elástica dada por la Ec. (3b), ya que tanto el numerador como el denominador son funciones de las mismas variables: K_1 y K_2. Entonces, el numerador no es independiente del denominador y, consecuentemente, la secuencia de operaciones del ítem 4.2 no son válidas.

Una vez detectados estos problemas con la fórmula dada por la Ec. (6b), el paso siguiente será proponer una forma de evitarlos.

5.1. *La Fórmula General para el Cálculo del Error Propagado*

Un estudio más minucioso sobre teoría de errores permite afirmar que, para una función f de n variables $z_1, z_2, ..., z_n$, el error propagado de la función debido a los errores de sus variables independientes se calcula, con una aproximación de primer orden, por la siguiente expresión (ver [10 y 11], por ejemplo):

$$\sigma_{fm} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial z_j}.\frac{\partial f}{\partial z_k}cov(z_j,z_k)}, \qquad (12)$$

donde $cov(z_j, z_k)$ es la covariancia entre las variables independientes z_j y z_k.

Para una función con dos variables independientes, dadas por $X = \overline{X} \pm \sigma_{Xm}$ y $Y = \overline{Y} \pm \sigma_{Ym}$, siendo $cov(X,Y)$, la covariancia entre ellas, la Ec. (12) se transforma en:

$$\sigma_{fm} = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial X}\sigma_{Xm}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial Y}\sigma_{Ym}\right)^2 + 2\frac{\partial f}{\partial X}\frac{\partial f}{\partial Y}cov(X,Y)}, \qquad (13)$$

en la que las derivadas se deben calcular para $X = \overline{X}$ y $Y = \overline{Y}$. Así, para la división (tema central de este artículo), dada por $f = X/Y$, la Ec. (13) toma la forma:

$$\sigma_{fm} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{Xm}}{\overline{Y}}\right)^2 + \left(\frac{\overline{X}}{\overline{Y}^2}\sigma_{Ym}\right)^2 - 2\frac{\overline{X}}{\overline{Y}^3}cov(X,Y)}. \qquad (14)$$

La Ec. (14) es general para la determinación del error propagado en la operación de división y, dependiendo del tipo de relación entre las variables X e Y, puede presentar resultados distintos, conforme veremos, para tres casos especiales.

5.1.1. *La Ecuación (14) para X e Y Linealmente Dependientes Entre Sí: Caso 1*

Si las variables X e Y fueran linealmente dependientes entre sí, y con el *mismo sentido de crecimiento*, entonces la covariancia entre ellas está dada por (ver CAAP. 4 de [11], por ejemplo):

$$cov(X,Y) = \sigma_{Xm}\sigma_{Ym} \qquad (15)$$

Para esta situación el radicando en el segundo miembro de la Ec. (14) es un cuadrado perfecto, lo que reduce la ecuación a

$$\sigma_{fm} = \frac{\overline{X}}{\overline{Y}}\left|\frac{\sigma_{Xm}}{\overline{X}} - \frac{\sigma_{Ym}}{\overline{Y}}\right| \qquad (16a)$$

que corresponde al menor error propagado posible en la operación de división. Adicionalmente, debemos notar que, en el caso en que las variables X e Y sean iguales ($X = Y = \overline{Z} \pm \sigma_{Zm}$), la Ec. (16a) da cero para la desviación propagada, lo que es coherente con la intuición: la división de una medida entre sí misma, diferente de cero, aún cuando no sea conocida exactamente, tiene por resultado el valor exacto 1.

5.1.2. *La Ecuación (14) para X y Y Linealmente Dependientes Entre Sí: Caso 2*

Debemos observar que, en el caso en que las variables X e Y fuesen linealmente dependientes pero con *sentido inverso de crecimiento*, la covariancia entre estas variables vendría dada por $-\sigma_{Xm}\sigma_{Ym}$ [11]. En este caso, a Ec. (14) daría el siguiente resultado:

$$\sigma_{fm} = \frac{\overline{X}}{\overline{Y}}\left(\frac{\sigma_{Xm}}{\overline{X}} + \frac{\sigma_{Ym}}{\overline{Y}}\right) \qquad (16b)$$

que corresponde al máximo error propagado posible (desvío máximo), y es equivalente a la Ec. (6a) puesto que $\overline{OP} = \overline{X}/\overline{Y}$. Este resultado significa que a Ec. (6a) debería usarse sólo cuando las medidas involucradas en la división sean linealmente dependientes y con sentido inverso de crecimiento.

5.1.3. *La Ecuación (14) para X e Y Independientes Entre Sí*

En el caso de que X e Y sean variables independientes entre sí, la covariancia entre ellas es cero [10-14]. En este caso, colocando el término $(\overline{X}/\overline{Y})^2$ en evidencia en la Ec. (14) y extrayendo la raíz, obtenemos:

$$\sigma_{fm} = \frac{\overline{X}}{\overline{Y}}\sqrt{\left(\frac{\sigma_{Xm}}{\overline{X}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{Ym}}{\overline{Y}}\right)^2}, \qquad (17)$$

que es la misma expresión obtenida para la desviación estándar en la Ec. (6b), para $\overline{OP} = \overline{X}/\overline{Y}$. Hay que observar que la Ec. (17), idéntica a la Ec. (6b), *no* es una fórmula general para la división: está restringida a los casos en que las variables independientes X e Y de la función tengan *covariancia igual a cero*, como es el caso de variables independientes entre sí.

5.2. *Aplicación de la Fórmula General de Propagación de Errores a la Ec. (3b)*

Hay que considerar que, en la Ec. (3b), aunque el numerador sea dependiente del denominador, las constantes elásticas K_1 y K_2 son independientes entre sí, puesto que el experimento para la determinación de K_1 se hizo de forma independiente de aquel para la determinación de K_2. Esto significa que $cov(K_1, K_2) = 0$ y la Ec. (13) deriva en la siguiente expresión para el error propagado:

$$\sigma_{Keq} = \sqrt{\left[\left(\frac{\overline{K_2}}{\overline{K_1}+\overline{K_2}}\right)^2\sigma_{K1m}\right]^2 + \left[\left(\frac{\overline{K_1}}{\overline{K_1}+\overline{K_2}}\right)^2\sigma_{K2m}\right]^2}, \qquad (18)$$

que produce el mismo resultado correcto obtenido en el ítem 4.1.

5.3. *Una Alternativa al Uso de Derivadas*

Un ejemplo semejante al que presentamos en este artículo para la división fue presentado por Taylor (pág. 66 de la referencia [14]) involucrando una diferencia de cantidades dependientes. Su propuesta para evitar el problema de resultados errados, contenidos en la solución paso a paso, fue la misma de la sección 5.2: uso de la ecuación general de propagación de errores. Pero, existen grados curriculares en los que el alumno cursa su primera disciplina de Física Experimental sin un conocimiento más profundo acerca de derivadas de funciones (ver, por ejemplo, [1 y 3]). En este caso, el uso de la Ec. (12) para el cálculo de propagación de errores es inviable, y esto justifica muchas veces la utilización de la Ec. (6b), ya que ella puede deducirse de forma simple, a partir de las Ecs. (11a) y (11b). Más, como fue constatado, la Ec. (6b) no es adecuada en muchas situaciones que involucran el cálculo de propagación de errores de medidas. Entonces, sería deseable la proposición de una forma alternativa para el cálculo del error propagado. Esa forma alternativa debería, al mismo tiempo, eliminar los problemas ya detectados con la Ec. (6b) y también evitar el uso de expresiones analíticas para derivadas, como se hizo en las Ecs. (14) y (18). Para una función en la que sus variables independientes no estén correlacionadas entre sí estos requisitos deseables pueden ser satisfechos a través de la determinación del error propagado por partes: se determina individualmente el error propagado en la función debido al error de cada variable independiente. El razonamiento es semejante al que fue desarrollado en las Ecs. (11a) y (11b), pero con una diferencia fundamental: cada contribución para el error propagado de la función es calculada separadamente, con las demás variables independientes dadas por sus valores medios. Con este razonamiento, para una función $f(z_1, z_2, ..., z_n)$, la contribución de la i-ésima variable independiente al error propagado en esa función está dada por:

$$\begin{aligned}\sigma_{fm,zi} = \tfrac{1}{2}|f(\bar{z}_1, \bar{z}_2, ..., \bar{z}_i + \sigma_{zmi}, ..., \bar{z}_n) \\ -f(\bar{z}_1, \bar{z}_2, ..., \bar{z}_i - \sigma_{zmi}, ..., \bar{z}_n)|.\end{aligned} \tag{19}$$

En este caso, la expresión final para la función será:

$$f(z_1, z_2, ..., z_n) = f(\bar{z}_1, \bar{z}_2, ..., \bar{z}_n) \pm \sigma_{fm}, \tag{20}$$

donde σ_{fm} es la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de todas las contribuciones obtenidas a través de la Ec. (19). Vale hacer notar que la Ec. (20) contiene una simplificación, que consiste en considerar el valor medio de la función como el valor de la función para los valores medios de las variables independientes.

5.4. *Determinación de K_{eq} a través de la Solución Alternativa*

Utilizando la alternativa propuesta en el ítem 5.3, la determinación de la desviación estándar para el valor medio de la constante elástica del resorte equivalente se hace, con la Ec. (3b), del siguiente modo:

Desviación de K_{eq} debido a K_1:

$$\sigma_{Keq,K1} = \frac{1}{2}\left|\frac{(\overline{K_1} + \sigma_{K1m})\overline{K_2}}{(\overline{K_1} + \sigma_{K1m}) + \overline{K_2}} - \frac{(\overline{K_1} - \sigma_{K1m})\overline{K_2}}{(\overline{K_1} - \sigma_{K1m}) + \overline{K_2}}\right| \tag{21a}$$

y

Desviación de K_{eq} debido a K_2:

$$\sigma_{Keq,K2} = \frac{1}{2}\left|\frac{(\overline{K_2} + \sigma_{K2m})\overline{K_1}}{(\overline{K_2} + \sigma_{K2m}) + \overline{K_1}} - \frac{(\overline{K_1} - \sigma_{K1m})\overline{K_1}}{(\overline{K_2} - \sigma_{K2m}) + \overline{K_1}}\right|. \tag{21b}$$

Con los resultados de las Ecs. (21a) y (21b) podemos calcular la desviación estándar, dada por la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de las desviaciones parciales, como sigue:

$$\begin{aligned}\sigma_{Keq} &= \sqrt{\sigma^2_{Keq,K1} + \sigma^2_{Keq,K2}} \\ &= \sqrt{0{,}004700...^2 + 0{,}006730...^2} = 0{,}008 gf/cm.\end{aligned} \tag{22}$$

Naturalmente, este es el resultado correcto esperado para la desviación estándar propagada usando la Ec. (3b), que tiene el numerador dependiente del denominador.

6. CONCLUSIONES

Aunque apenas hemos mencionado el ejemplo dado por Taylor [14] para la sustracción, podemos concluir que la Ec. (5b) puede presentar resultados falsos, porque el razonamiento para su deducción es semejante a aquel evidenciado en (11a) y (11b). En el ejemplo de este artículo, un aspecto que merece ser resaltado se refiere a la validez de la "fórmula viciada" dada por la Ec. (6b) para la división, puesto que también puede presentar resultados incorrectos, como aquel obtenido en el ítem 4.2. Su uso en el análisis de datos experimentales debe evitarse, a menos que tengamos un profundo conocimiento sobre el asunto y sepamos discernir las situaciones en que, de hecho, ella puede ser usada.

Lo deseable, en propagación de errores, sería el uso de la fórmula general dada por la Ec. (12). Esta ecuación involucra el uso de derivadas parciales, además del asunto "covariancia" que muchas veces ni se menciona en los cursos iniciales de Física Experimental. Esto dificulta el uso de tal ecuación, por ejemplo, en la disciplina Física Experimental I.

Una alternativa viable en experimentos para los cuales las variables independientes de la función no estén correlacionadas entre sí es el cálculo fragmentado del error propagado, para cada variable independiente, conforme se ha mostrado en el ítem 5.3. Esta alternativa incorpora el cálculo de derivadas parciales, pero de una forma sutil, perfectamente asimilable por alumnos que no tienen el pre-requisito del cálculo diferencial. Aunque tal alternativa no sea general, porque presupone no correlación en las variables independientes de la función, es mucho más versátil que las Ecs. (5b) y (6b), y puede aplicarse prácticamente, a cualquier función. Vale la pena resaltar, todavía, que tal alternativa utiliza un procedimiento único en el cálculo del error propagado de cualquier función, no siendo necesaria la memorización de un conjunto de fórmulas específicas por parte de los alumnos.

Como un último recurso, en el caso en que no haya disponibilidad de tiempo para el estudio de propagación de errores, en un primer curso de Física Experimental, los alumnos podrían utilizar software como el indicado en la referencia [6]. Para ello, la única exigencia es que el usuario sepa escribir una función usando la sintaxis de los lenguajes de programación. En este caso, aunque el alumno no sepa concretamente como se obtienen los resultados, por lo menos no corre el riesgo de obtener resultados equivocados por el uso de fórmulas inadecuadas.

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen al CNPq y a la FAPESP por la otorgación de becas Iniciación Científica, de Doctorado y de Productividad en Investigación, así como a los autores referenciados que, con sus investigaciones, contribuyeron en la realización de este artículo.

REFERENCIAS

[1] UFRN http://www.dimap.ufrn.br/computacao/fis315.-html acceso en 10/01/2005.

[2] UFPR http://www.cartografica.ufpr.br/disciplinas/cf063.-html acceso en 20/01/2005.

[3] UFSCar http://www.dep.ufscar.br/grad/paementa.htm acceso en 20/01/2005.

[4] Silva, Wilton P. e Silva, Cleide M. D. P. S., Mecânica Experimental para Físicos e Engenheiros, Ed. Universitária, João Pessoa (2000), pág. 101.

[5] KEM – Kit para Experiências de Mecânica, disponível em http://www.extensao.hpg.com.br/kits/kits.html acceso en 15/01/2005.

[6] LAB Fit Curve Fitting Software, online, download disponível em http://www.labfit.net acceso en 10/02/2005.

[7] Bussab, Wilton O. e Morettin, Pedro A - Estatística Básica –Atual Editora LTDA, São Paulo, (1995), pág. 264.

[8] Tipler, P. A., Física, Editora Guanabara Dois S. A. Rio de Janeiro, RJ, Vol. 1, 1a Edição, (1978), pág. 151.

[9] Software Educacional Vest21 Mecânica, online, download disponível em www.extensao.hpg.com.br acceso en 10/02/2005.

[10] Vuolo, J. H., Fundamentos da Teoria dos Erros, Ed. Edgard Blücher Ltda São Paulo, SP, 1a Edição, (1992).

[11] Silva, W. P. e Silva, C. M. D. P. S., Tratamento de Dados Experimentais UFPB Editora Universitária, João Pessoa, PB, 2a Edição, (1998).

[12] Helene, Otaviano A. M. e Vanin, Vitor R., Tratamento Estatístico de Dados em Física Experimental, Ed. Edgard Blücher LTDA, São Paulo, (1981).

[13] Bevington, P. R., e Robinson, D. K., Data Reduction and Error Analysis for the Physical Sciences, WCB/McGraw-Hill, Boston, Second Edition, (1992).

[14] Taylor, J. R., An Introduction to Error Analysis, 2nd Edition, University Science Books, Sausalito, California, (1997).

[15] Costa, A., Erros e Algarismos Significativos, Gazeta de Física, V 26 (4), p.4-10, out. (2003).