

INFLUENCIA DEL RUIDO EN LA SINCRONIZACIÓN DE DOS OSCILADORES FOTOCONTROLADOS

G. M. Ramírez¹, J. L. Guisset², J. L. Deneubourg³

¹Instituto de Investigaciones Físicas, Universidad Mayor de San Andrés. Casilla 8635 La Paz - Bolivia

^{2,3}Centre for Nonlinear Phenomena and Complex Systems, Université Libre de Bruxelles, Campus Plaine CP231, Bld. du Triomphe. Bruselas - Bélgica.

RESUMEN

Se estudia la influencia de ruidos uniforme y Gaussiano en un sistema de dos osciladores fotocontrolados (LCOs) acoplados. Se analizaron tres situaciones diferentes: la primera involucra dos LCOs desacoplados pero afectados por ruido; la segunda, un LCO que actúa como “maestro” del otro; y la tercera, en que ambos LCOs pueden influenciarse. Se observa que el ruido puede inducir desincronización o sincronización dependiendo de las características de los LCOs y del ruido que actúa sobre estos osciladores.

1. INTRODUCCIÓN

La sincronización es un fenómeno bastante común que se presenta en osciladores no lineales acoplados o en osciladores que son conducidos por fuerzas externas que dependen del tiempo. Un LCO es un oscilador de relajación y auto-sostenido [1][2]. En un sistema de dos LCOs [3], se entiende la sincronización como un ajuste de ritmos de los osciladores acoplados, lo que da lugar a un enganche de fases⁴ $\Delta\phi_{ij} = \text{constante}$ ⁵ y trabajando en condiciones tales que las perturbaciones naturales fueron minimizadas lo que permitió postular un modelo que se adapta bien a los resultados experimentales. Pero muchas veces, las perturbaciones son inevitables y es importante saber tratarlas ya que estas fluctuaciones pueden modificar sustancialmente el comportamiento del sistema [4][5]. En este trabajo se analiza el caso en el que los osciladores están influenciados por un ruido delimitado (uniforme) en un amplio intervalo y también por un ruido Gaussiano con varianzas σ_i^2 . Consideramos que el ruido actúa sobre la fuente de voltaje, situación, que de acuerdo con las características de los LCOs, causa cambios en la amplitud de la señal de los mismos; en tanto que para los osciladores libres de ruido la amplitud permanece constante. El artículo está estructurado de la siguiente manera: en §2, se explican las ecuaciones del modelo en presencia de ruido, así como las definiciones de base para la caracterización de la sincronización; en §3, se detallan los tres tipos de sistema estudiados cuando un ruido uniforme actúa sobre ellos. en §4, se presentan los resultados de la acción de ruidos Gaussianos sobre un sistema de LCOs mutuamente acoplados. Finalmente, en §5, se dan las conclusiones de este estudio.

2. MODELO

Basados en las ecuaciones del modelo presentado para LCOs sin ruido [3], se plantean las ecuaciones cuando el sistema de LCOs está influenciado por ruido uniforme:

$$\begin{aligned} \frac{dV_i(t)}{dt} &= \lambda_i[(V_{Mi} + (1 - 2\zeta_i(t))\sqrt{D}) - V_i(t)]\epsilon_i(t) \\ &\quad - \gamma_i V_i(t)[1 - \epsilon_i(t)] + \sum_{i,j}^N \beta_{ij} \delta_{ij} [1 - \epsilon_j(t)]; \\ &\quad i, j = 1, \dots, N, \end{aligned} \quad (1)$$

donde $\zeta_i(t)$ es un número aleatorio escogido de una distribución uniforme en el intervalo $[0,0, 1,0]$. Así, el ruido uniforme está dado por $(1 - 2\zeta_i(t))\sqrt{D}$ definiéndose los umbrales inferior y superior en una distribución uniforme de acuerdo con el valor \sqrt{D} . Por otro lado, cuando la influencia es debida a un ruido Gaussiano, se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{dV_i(t)}{dt} &= \lambda_i[(V_{Mi} + \xi_i(t)\sqrt{D}) - V_i(t)]\epsilon_i(t) \\ &\quad - \gamma_i V_i(t)[1 - \epsilon_i(t)] + \sum_{i,j}^N \beta_{ij} \delta_{ij} [1 - \epsilon_j(t)]; \\ &\quad i, j = 1, \dots, N, \end{aligned} \quad (2)$$

y en este caso, $\xi_i(t)$ representa nuevamente un número aleatorio escogido de una distribución normal con media cero y con varianza σ_i^2 . El término de ruido $\xi_i(t)\sqrt{D}$ está determinado por la varianza del ruido σ_i^2 . En (1) y (2), el estado del oscilador $\epsilon_i(t)$ está definido por

$$\begin{aligned} \epsilon_i(t) &= 1 \quad \text{LCO apagado} \quad (\text{carga}) \\ \epsilon_i(t) &= 0 \quad \text{LCO encendido} \quad (\text{descarga}). \end{aligned}$$

Al mismo tiempo, definimos la fase instantánea de un LCO (p. ej. LCO_i) como una función de los instantes de encendido de los otros LCOs (p. ej. LCO_j) de acuerdo con el método del mapa de Poincaré [7][8][9]. Esta definición de la fase conduce a un resultado correcto ya sea

¹e-mail: gramirez@ulb.ac.be

²e-mail: jlguisse@ulb.ac.be

³e-mail: jldeneub@ulb.ac.be

⁴El término enganche de fases es más conocido en la literatura como phase-locking.

⁵aún cuando esta definición no incluye algunos fenómenos no triviales.

que las oscilaciones sean puramente periódicas o estén afectadas por ruido [6].

$$\phi_i(t) = 2\pi \frac{t - t_j^{(k)}}{t_j^{(k+1)} - t_j^{(k)}} + 2\pi k; \quad t_j^{(k)} \leq t \leq t_j^{(k+1)}. \quad (3)$$

Expresiones similares para la fase instantánea pueden escribirse para el LCO_j en términos de los instantes de tiempo $t_i^{(k)}$ en los cuales el LCO_i se enciende.

$$\phi_j(t) = 2\pi \frac{t - t_i^{(k)}}{t_i^{(k+1)} - t_i^{(k)}} + 2\pi k; \quad t_i^{(k)} \leq t \leq t_i^{(k+1)}. \quad (4)$$

Bajo esta consideración, se puede definir una diferencia de fase lineal (LPD) entre los osciladores en términos de la diferencia entre los tiempos de encendido de cada LCO, considerando a uno de ellos como el oscilador de referencia:

$$\begin{aligned} \Delta\Phi_{ij}^{\text{lineal}} &= \phi_j(t_i^{(k+1)}) - \phi_i(t_i^{(k+1)}) \\ &= 2\pi \frac{t_j^{(k+1)} - t_i^{(k+1)}}{t_j^{(k+1)} - t_j^{(k)}}. \end{aligned} \quad (5)$$

Se debe resaltar que las fases $\phi_{i,j}$ están definidas en todo el eje real. Para la diferencia de fase cíclica (CPD) se puede definir el resultado en un círculo [0 : 1]:

$$\Delta\phi_{ij}^{\text{ciclica}} = \frac{1}{2\pi} [\Delta\Phi_{ij}^{\text{lineal}} \bmod 2\pi]. \quad (6)$$

En nuestros experimentos numéricos, trabajamos con dos osciladores (LCO₁ and LCO₂). Así, las ecuaciones que describen sincronización con observaciones estroboscópicas son:

$$\begin{aligned} \Delta\Phi_{12}^{\text{lineal}} &= \phi_2(t_1^{(k+1)}) - \phi_1(t_1^{(k+1)}) \\ &= 2\pi \frac{t_2^{(k+1)} - t_1^{(k+1)}}{t_2^{(k+1)} - t_2^{(k)}}, \end{aligned} \quad (7)$$

y

$$\Delta\phi_{12}^{\text{ciclica}} = \frac{1}{2\pi} [\Delta\Phi_{12}^{\text{lineal}} \bmod 2\pi]. \quad (8)$$

3. RUIDO UNIFORME

Utilizando (1) se han efectuado simulaciones para estudiar la influencia del ruido uniforme sobre los LCOs. En (1), se puede asociar \sqrt{D} a la intensidad de ruido que se ha hecho variar en el intervalo [0,0, 4,0]. Se han estudiado tres situaciones: la primera está referida al caso en el cual los LCOs no están acoplados; en la segunda, sólo un LCO ejerce influencia sobre el otro; finalmente, en la tercera, los LCOs están mutuamente acoplados.

3.1. Comportamiento de LCOs libres de ruido

Cuando un LCO no es afectado por ruido, su período permanece constante; en este sentido, se espera que la diferencia de fase entre dos LCOs idénticos no acoplados debe también permanecer constante. (Fig. 1(a)). Por

otro lado, cuando los LCOs no son idénticos, el comportamiento es tal que la LPD disminuye o crece dependiendo de los períodos de los LCOs. De la Fig. 1, se puede caracterizar un sistema de LCOs no acoplados por los siguientes hechos:

- La LPD es tal que esta permanece constante aunque no necesariamente cero ($T_{01} = T_{02}$), crece ($T_{01} < T_{02}$) o disminuye ($T_{01} > T_{02}$) con una pendiente definida.
- La distribución de la LPD es uniforme (LCOs no idénticos) o es una función δ (LCOs idénticos).
- Los puntos para la CPD están distribuidos sobre líneas bien definidas.
- La distribución de la CPD presenta modos múltiples (LCOs no idénticos) o es una función δ (LCOs idénticos).

Si se considera el efecto de ruido en los sistemas descritos anteriormente, se puede notar que la LPD del sistema de LCOs idénticos se comporta difusivamente realizando un movimiento que recuerda a la marcha aleatoria (Fig. 2(h)) para diferentes valores de la intensidad de ruido (región amplificada en el gráfico); cuando el ruido es suficientemente intenso, la figura que se obtiene nos recuerda a la turbulencias (línea gris oscura en la Fig. 2(h)). Las distribuciones de la LPD y la CPD se muestran en Fig. 2(b)-(g). En lo que concierne a las distribuciones, se puede ver que es mejor trabajar con la diferencia de fase normalizada (cíclica) ya que esto permite caracterizar el sistema de una mejor manera y así evitar interpretaciones confusas. Por ejemplo en el caso de ruidos muy intensos, las distribuciones de LPD muestran un cuadro unimodal pero esto no significa que un valor definido de la LPD es más probable, es solamente el efecto de que la LPD cae difusivamente en el tiempo. Por el contrario, las distribuciones de CPD muestran un comportamiento estocástico del sistema que permanecen uniformes aún para ruidos más intensos. Por consiguiente, la distribución de la CPD será una de nuestras principales herramientas para analizar sistemas de LCOs.

3.2. Un LCO conduce a otro (maestro-esclavo)

Para esta situación, se ha utilizado para el LCO₁, los mismos valores de parámetros que en §3.1, y se ha considerado al LCO₂ como el LCO maestro en el sentido que éste puede actuar sobre el LCO₁ pero no recibe ninguna influencia del mismo.

En el caso en que un LCO conduce a otro, se puede esperar un comportamiento síncrono si los LCOs no son muy diferentes y la influencia ruidosa que reciben del medio es despreciable.

Cuando los LCOs son idénticos, se observa que la sincronización sólo puede producirse cuando la intensidad de ruido es nula, es decir, cualquier ruido -por más pequeño que éste sea- destruirá el régimen síncrono (Fig. 3(a)). Por otro lado, cuando los LCOs son diferentes, la región de sincronización se mantiene cuando

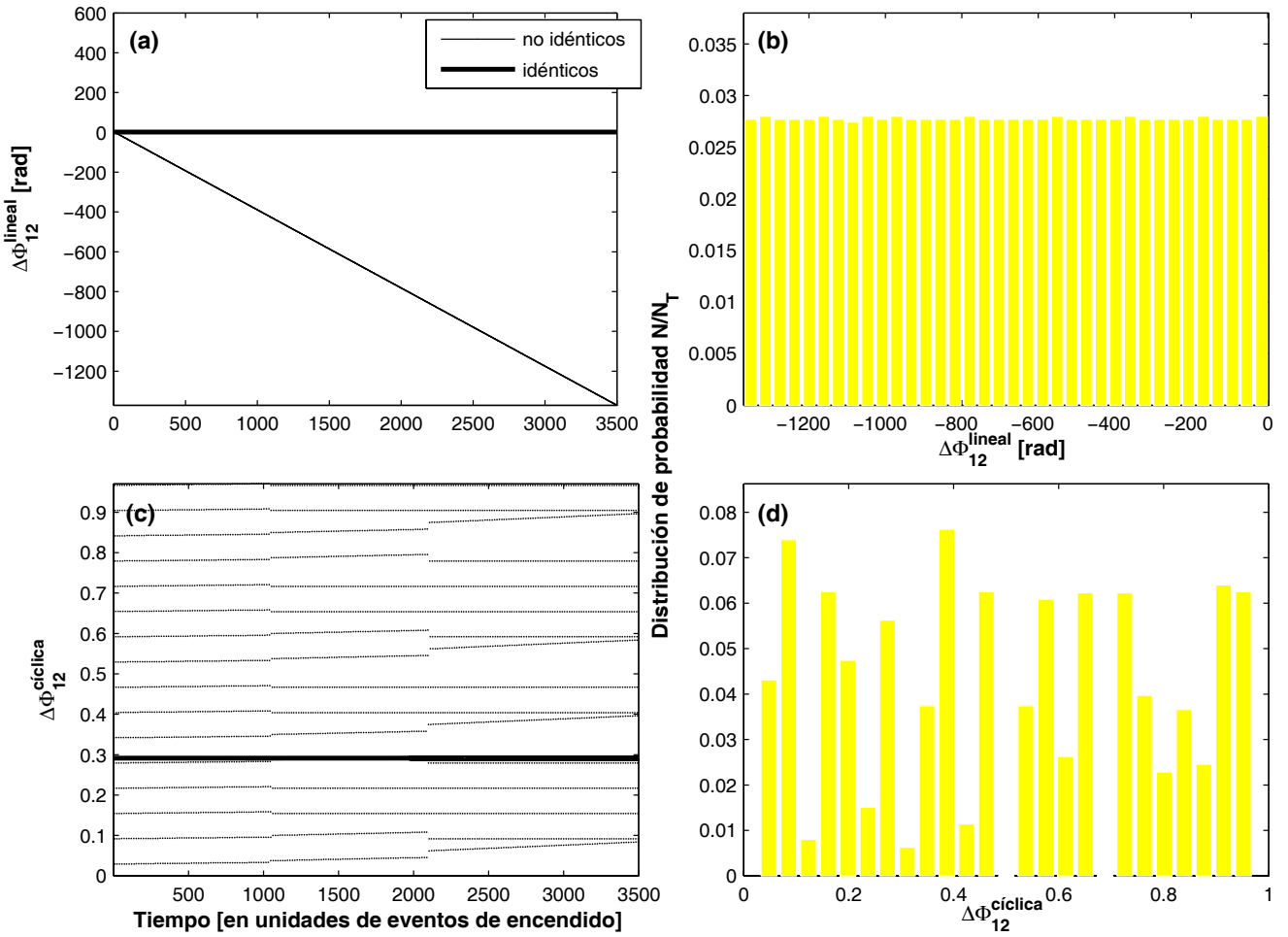


Figura 1. Características de un sistema de dos LCOs no acoplados con períodos $T_{01} = T_{02} = 34,0$ ms, correspondientes a los valores de parámetros $C = C_1 = C_2 = 0,47\mu\text{F}$, $R_\gamma = R_{\gamma 1} = R_{\gamma 2} = 1,6$ k Ω , $R_{\lambda 1} = R_{\lambda 2} = 101,165$ k Ω (línea gruesa), y $T_{01} = 34,0$ ms, y $T_{02} = 32,0$ ms con valores de los parámetros $R_{\lambda 2} = 95,026$ k Ω (línea delgada). Se toma la evolución sobre $N_T = 3500$ eventos de encendido. (a) Evolución de la LPD de los LCOs. (b) Distribución de la LPD de los LCOs. (c) Evolución de la CPD de los LCOs. (d) Distribución de la CPD para osciladores no idénticos.

la intensidad de ruido es débil como se muestra en la Fig. 3(b). En este gráfico se puede ver que el régimen síncrono “resiste” mejor a la influencia del ruido cuando los LCOs son más diferentes, es decir, mientras mayor sea la diferencia entre ellos, más grande será la región de sincronización pero la región de transición se vuelve también más ancha. Es evidente que lo anterior sólo es válido cuando las características de los LCOs son tales que sus valores están comprendidos en la lengua de Arnold (ver [10]); de otra manera, no podemos referirnos a sincronización propiamente dicha.

3.3. LCOs acoplados

En éste caso, los LCOs tienen la misma jerarquía y se utilizan los mismos valores de parámetros que se usaron anteriormente para el LCO₁. Primeramente, se analiza la situación en la cual los LCOs son idénticos. En la Fig. 4(a) se representa la varianza de la CPD como

una función de la intensidad de ruido y los gráficos de la parte superior de la figura son las evoluciones de la LPD para determinados valores de la intensidad de ruido, mientras que los gráficos de la parte inferior corresponden a las distribuciones de CPD para estos valores de \sqrt{D} . Se observa una amplia región de transición en la cual para valores pequeños de la intensidad de ruido ($\sqrt{D} = 0,2$, $\sqrt{D} = 0,4$), la evolución de la LPD permanece alrededor de cero, indicando que la sincronización está aún presente, lo que es confirmado además por la distribución de la CPD que contiene sólo dos picos en los valores extremos del histograma. Para valores moderados ($\sqrt{D} = 1,75$), la evolución de la LPD presenta algunos saltos de fase con regiones casi estables o épocas alrededor de valores múltiplos de 2π ; la dinámica es similar a la de una caminata aleatoria y la distribución de la CPD muestra en cierta medida un proceso de transición. Por otra parte, para valores grandes de la intensidad de

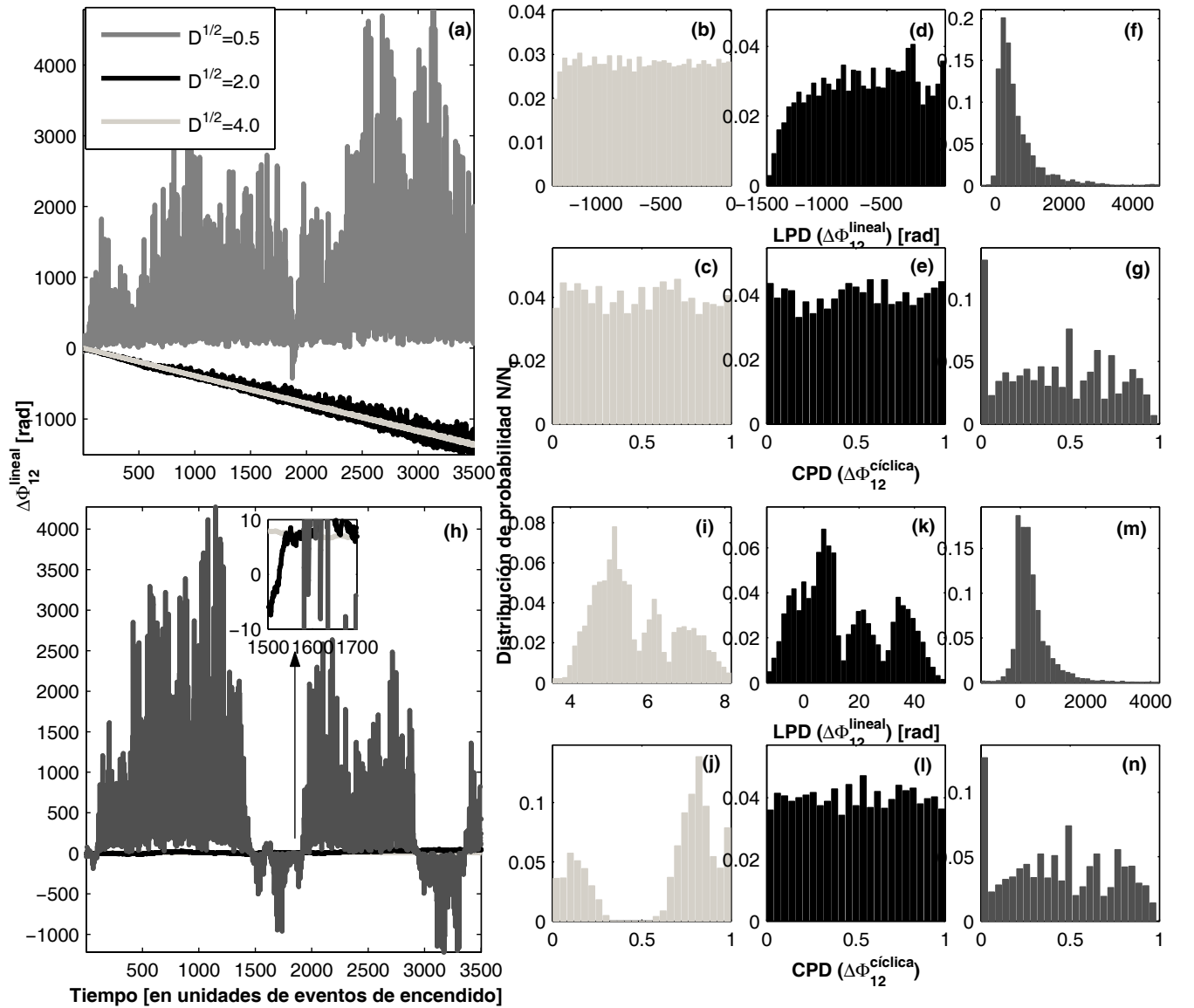


Figura 2. Evoluciones de las LPDs y distribuciones para las LPDs y las CPDs para diferentes intensidades de ruido. El valor de los parámetros usados para los casos de LCOs idénticos y no idénticos son los mismos que los utilizados en la Fig. 1. (a) Evolución de la LPD para LCOs no idénticos. (b), (d), y (f) distribución de $\Delta\Phi_{12}^{\text{lineal}}$ cuando $\sqrt{D} = 0,5$, $\sqrt{D} = 2,5$, y $\sqrt{D} = 4,0$ respectivamente. (c), (e), y (g) Distribución de $\Delta\Phi_{12}^{\text{ciclica}}$ para las mismas intensidades de ruido que en los casos anteriores. (h) Evolución de la LPD para LCOs idénticos. (i), (k), y (m) Distribución de $\Delta\Phi_{12}^{\text{lineal}}$. (j), (l), y (n) Distribución de $\Delta\Phi_{12}^{\text{ciclica}}$.

ruido ($\sqrt{D} = 2,5$), la evolución de la LPD es como la de una caminata aleatoria y la distribución de la LPD es ancha, lo que indica que la sincronización se perdió. Finalmente, se representa en la Fig. 4(b) el caso en el cual los LCOs no son idénticos. Los valores usados para el período del LCO₂ son, $T_{02} = 33,5$ ms (línea gris), y $T_{02} = 34,5$ ms (línea negra) son simétricos respecto a $T_{01} = 34,0$ ms. La varianza de la CPD como función de la intensidad de ruido es casi idéntica con un leve desplazamiento en la región síncrona. Como se muestra en la Fig. 4(a), en los gráficos de la parte superior de la figura, se representa la evolución de la LPD, y en los gráficos de la parte inferior, las respectivas distribucio-

nes para ambas situaciones. Para intensidades de ruido pequeñas ($\sqrt{D} = 0,2$), la sincronización está presente en ambos casos, a pesar de que en el caso $T_{02} < T_{01}$ hay un salto de fase. En el máximo de la región de transición ($\sqrt{D} = 0,4$), aparecen numerosos saltos de fase, especialmente cuando $T_{02} < T_{01}$ y la distribución de la CPD revela de nuevo un proceso de transición. Para valores de intensidad de ruido situados en la región de desincronización ($\sqrt{D} = 1,75$ y $\sqrt{D} = 2,5$), la evolución de la LPD decrece o aumenta tal como en el caso de dos LCOs desacoplados, lo que sugiere que los efectos del ruido actúan de forma tal que el acoplamiento no sea importante.

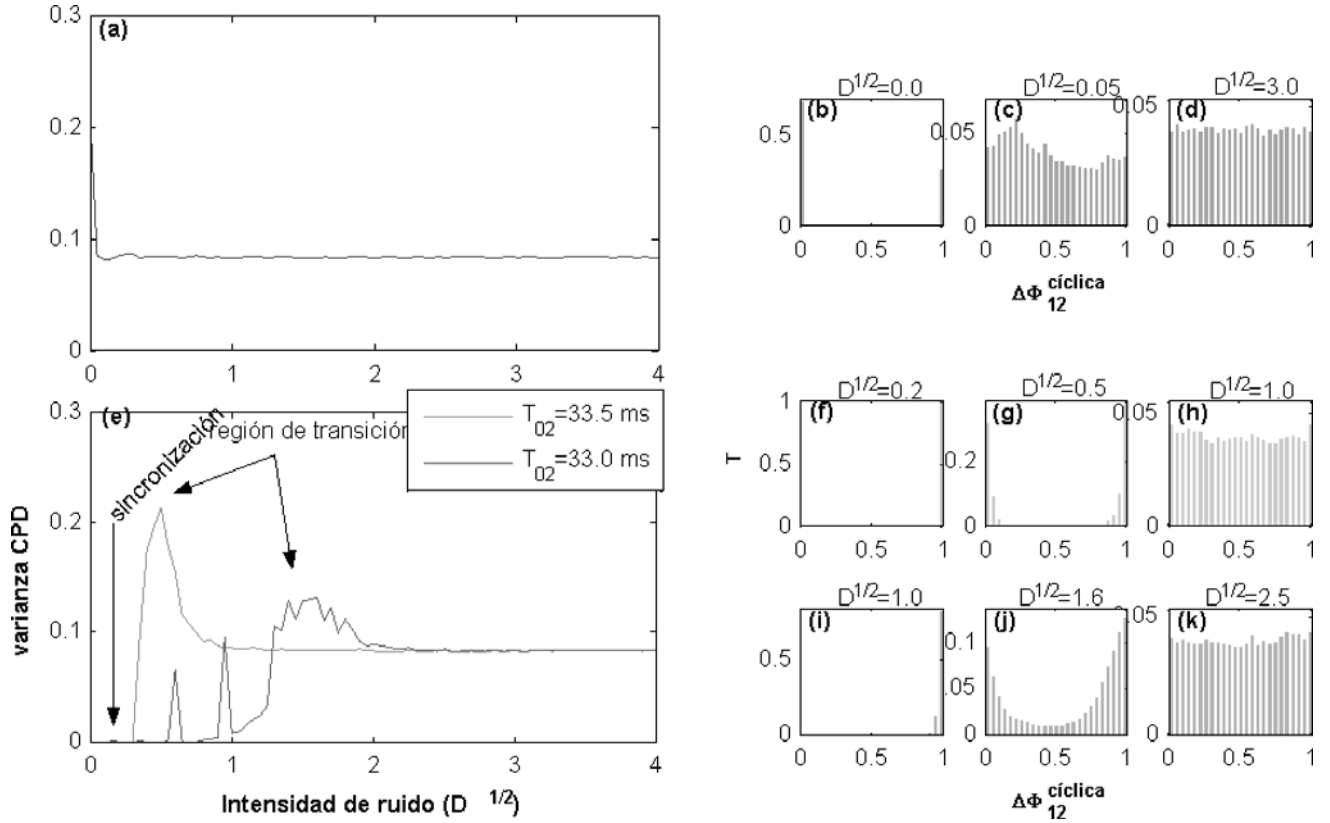


Figura 3. Varianza de la CPD para diferentes intensidades de ruido para una configuración maestro-esclavo. Los valores de parámetros son: $T_{01} = 34,0$ ms y el acoplamiento $\beta = 166$. (a) Caso de LCOs idénticos. Distribuciones de CPD mostrando que sólo que la sincronización es posible cuando los LCOs están libres de ruido. (b) Caso de LCOs no idénticos. Los valores de parámetros usados para el LCO₁ son $T_{02} = 33,5$ ms (línea negra), y $T_{02} = 33,0$ ms (línea gris). Las distribuciones de CPD se muestran para indicar la transición de la sincronización a la desincronización. (f)–(h) para $T_{02} = 33,5$ ms y (i)–(k) para $T_{02} = 33,0$ ms.

4. RUIDO GAUSSIANO

Desde un punto de vista teórico (aunque no necesariamente práctico), el ruido Gaussiano ofrece mayor riqueza en el sentido que es un ruido que no está bien delimitado y sigue una distribución normal, la más común para la descripción estadística de fenómenos en la naturaleza.

4.1. Generación de ruido Gaussiano

Para nuestras simulaciones, se ha trabajado con ruido Gaussiano generado a partir del método del Teorema del Límite Central con lo que garantizamos un generador de números aleatorios confiable. Primeramente se verificó que los números aleatorios que siguen una distribución uniforme en el intervalo $[0, 1]$ generados en nuestro programa tenían buenas propiedades estadísticas. Cada vez que se generan señales ruidosas con distribución normal, se pueden ajustar la media y la varianza de la amplitud de la señal.

El Teorema del Límite Central establece que la suma de N números aleatorios puede aproximarse a una distribución normal a medida que N tiende al infinito. Un algoritmo que utiliza esta aproximación es:

```
X = 0 for i = 1 to N
```

```
U = ran()
X = X + U
```

end

Para números aleatorios en $[0, 1]$, $\mu = 0,5$ y $\sigma = 1/12$ ajustando X a $\mu = 0$ y $\sigma = 1$

```
X = X - N/2 poniendo la media a 0
```

```
X = X * sqrt(12/N) ajustando la varianza a 1
```

Cuando el algoritmo finaliza, X será nuestro número aleatorio según una distribución normal unitaria. X puede posteriormente ser modificado para tener una media particular μ y una varianza σ , por ejemplo:

$$Xt = \mu + \sqrt{\sigma}X$$

El inconveniente de este método es que X estará en el intervalo $[-N, N]$, en vez de $(-\infty, \infty)$ y si los números aleatorios uniformes no son verdaderamente independientes, entonces, el ruido no será blanco por mucho tiempo. Se trabajó con $N = 21$ con el fin de tener buenos resultados.

En este caso, se utiliza (2) para efectuar simulaciones de la influencia de ruido Gaussiano con media 0 y varianza 1 en un sistema de dos LCOs acoplados. Es

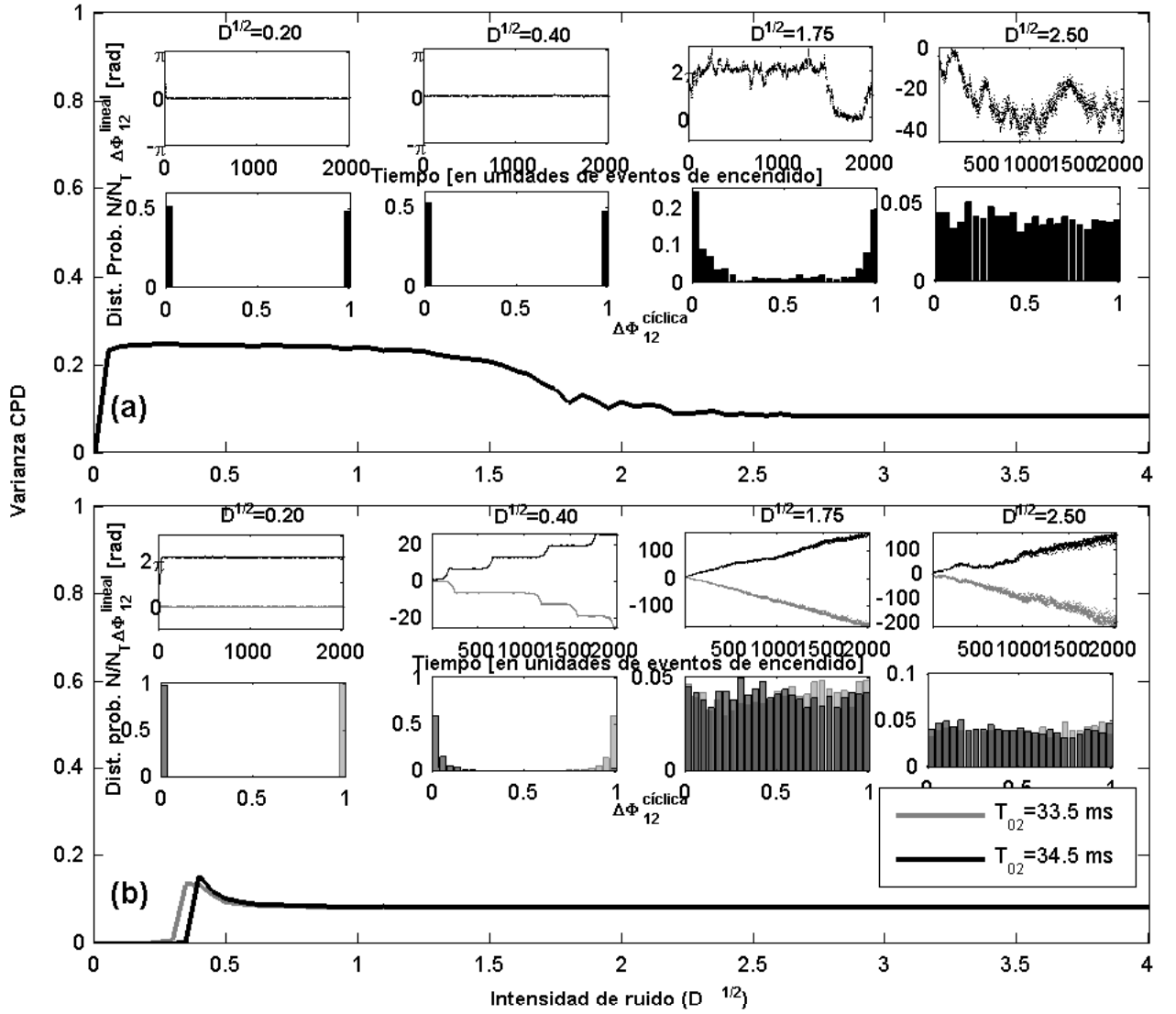


Figura 4. Varianza de la CPD para diferentes intensidades de ruido para LCOs acoplados. Los valores de los parámetros son los mismos que en la Fig. 3 para T_{01} y β . (a) Caso de LCOs idénticos. Distribuciones de la CPD mostrando que la sincronización es sólo posible cuando los LCOs no están afectados por el ruido. (b) Caso de LCOs no idénticos. Los valores de parámetros utilizados para LCO₂ son $T_{02} = 33,5$ ms (línea gris), y $T_{02} = 34,5$ ms (línea negra). Las distribuciones de la CPD se muestran para indicar la transición de la sincronización a la desincronización.

importante señalar que para el cálculo de la diferencia de fase (4), se consideró el promedio de los períodos, es decir,

$$\begin{aligned} \Delta\phi_{ij}^{\text{linear}} &= \Phi_i(t_i^{(k)}) - \Phi_j(t_i^{(k)}) \\ &= 2\pi \frac{t_j^{(k+1)} - t_i^{(k+1)}}{\frac{(t_j^{(k+1)} - t_i^{(k)}) + (t_i^{(k+1)} - t_i^{(k)})}{2}} \end{aligned} \quad (9)$$

y así garantizar un denominador no nulo que podría presentarse para intensidades de ruido elevadas, y además, sin cambiar sustancialmente los resultados.

4.2. Resultados

Las simulaciones efectuadas con ruido Gaussiano muestran que este ruido puede tener el mismo efecto “destructor de la sincronización”, pero algunos resultados sugieren que el ruido puede inducir sincronización cuando los LCOs tienen características muy distintas (ver Fig. 5). Así, tomando 2 LCOs cuyas características son: $T_{01} = 34,0$ ms, $T_{02} = 32,5$ ms, la intensidad del acoplamiento $\beta = 100$ y sometidos a ruidos Gaussianos con varianzas $\sigma_1 = 0,003$ y $\sigma_2 = 0,001$. En la Fig. 5 se muestra en cada una de las filas de gráficos, la relación de frecuencias ν_1/ν_2 , la LPD en función del tiempo y la distribución de probabilidades para la CPD. En ausencia de ruido ($\sqrt{D} = 0$), se ve que los LCOs no sin-

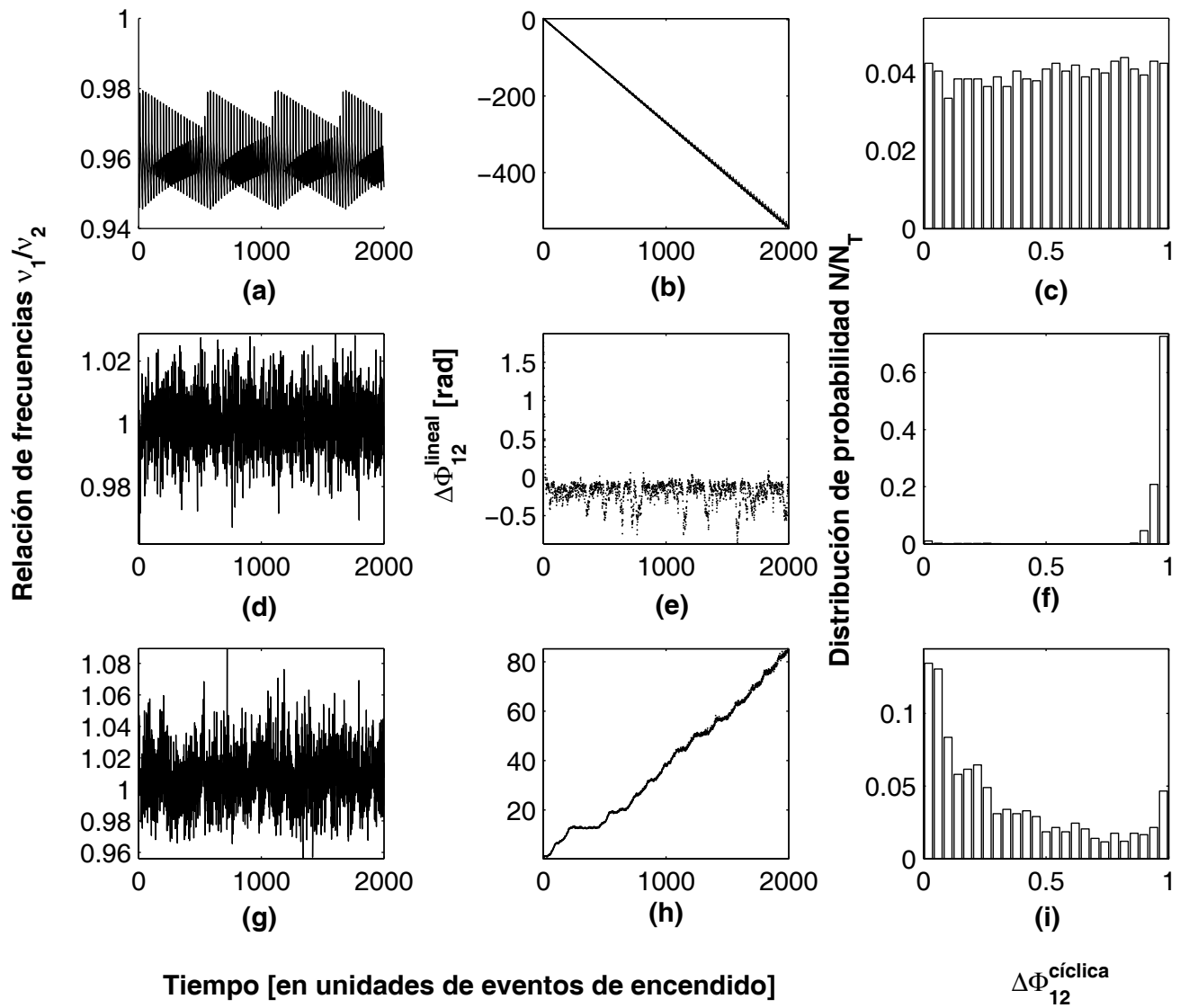


Figura 5. Relación de frecuencias ν_1/ν_2 , evolución de la LPD, y distribución de probabilidades para la CPD en un sistema de dos LCOs acoplados con $T_{01} = 34,0$ ms, $T_{02} = 32,5$ ms, $\beta = 100$, y las varianzas de los ruidos Gaussianos que actúan sobre cada uno de los LCOs, $\sigma_1 = 0,003$ y $\sigma_2 = 0,001$; cuando las intensidades de ruido son (a)-(c) ($\sqrt{D} = 0,00$), (d)-(f) ($\sqrt{D} = 1,40$) y (g)-(i) ($\sqrt{D} = 2,00$).

cronizan; las relaciones de frecuencias nunca llegan a ser iguales a la unidad (Fig. 5(a)), la LPD disminuye difusivamente (Fig. 5(b)) y la distribución de probabilidades para la CPD es uniforme (Fig. 5(c)). En tanto, que si se aumenta la intensidad de ruido a $\sqrt{D} = 1,40$, se muestra una situación de sincronización en promedio, caracterizada por fluctuaciones casi simétricas alrededor de $\nu_1/\nu_2 = 1$ (Fig. 5(d)), valores muy próximos a $\Delta\Phi_{12}^{lineal} = 0$ (Fig. 5(e)) y una distribución de la CPD unimodal (Fig. 5(f)). Si se aumenta aún más la intensidad de ruido, se vuelve a una situación de desincronización como lo muestran las Fig. 5(g)-(i), en cuyo caso, $\sqrt{D} = 1,40$. Los resultados anteriores muestran que el ruido Gaussiano en un sistema de dos LCOs acoplados,

no sólo induce desincronización, sino que también puede -bajo ciertas circunstancias- inducir un comportamiento sincrónico en el sistema. En nuestros experimentos numéricos, este último comportamiento se observó cuando las varianzas de los ruidos Gaussianos actuando sobre los LCOs son diferentes.

5. CONCLUSIONES

La influencia de ruidos uniforme y Gaussiano es similar pero en el caso de ruidos Gaussianos, incluso intensidades muy débiles, pueden hacer salir al sistema de su estado sincrónico. En lo referente a los saltos de fase, su número está en estrecha relación con la intensidad del ruido; mientras mayor sea la intensidad de ruido, más

grande será el número de saltos de fase. Además, estos saltos de fase aumentan y las épocas en que la LPD es aproximadamente constante se vuelven más estrechas con el tiempo y con la intensidad del ruido. Una característica del ruido Gaussiano es que si las varianzas de los ruidos son diferentes sobre cada uno de los LCOs, los osciladores que en condiciones libres de ruido no sincronizan, pueden llegar a hacerlo gracias a la influencia del ruido.

REFERENCIAS

- [1] J. L. Guisset, G. M. Ramírez Ávila, and J. L. Deneubourg, "Constructing coupled electronic fireflies and measuring their phase-locking behavior (in spanish)," *Revista Boliviana de Física*, vol. 1, no. 7, pp. 102–114, 2001.
- [2] J.-L. Guisset, J.-L. Deneubourg, and G. M. Ramírez-Ávila, "The phase information associated to synchronized electronic fireflies," *arXiv.nlin.AO/0206036*, no. Mon, 24 Jun 2002 16:07:15 GMT, 2002.
- [3] G. M. Ramírez Ávila, J. L. Guisset, and J. L. Deneubourg, "Synchronization in light-controlled oscillators," *Physica D: Nonlinear Phenomena*, vol. 182, no. 3-4, pp. 254–273, 2003.
- [4] J. García-Ojalvo and J. M. Sancho, *Noise in spatially extended systems*. New York.: Springer, 1999.
- [5] J. M. Sancho and J. García-Ojalvo, "Noise-induced order in extended systems: A tutorial," in *Stochastic Processes in Physics, Chemistry, and Biology* (J. A. Freund and T. Poschel, eds.), vol. 557 of *Lectures Notes in Physics*, pp. 235–246, Berlin: Springer, 2000.
- [6] A. Neiman, X. Pei, D. Russell, W. Wojtenek, L. Wilkens, F. Moss, H. Braun, M. T. Huber, and K. Voigt, "Synchronization of the noisy electrosensitive cells in the paddlefish," *Physical Review Letters*, vol. 82, no. 3, pp. 660–663, 1999.
- [7] M. G. Rosenblum, A. S. Pikovsky, and J. Kurths, "Phase synchronization in driven and coupled chaotic oscillators," *IEEE Transactions on Circuits and Systems-I*, vol. 44, no. 10, pp. 874–881, 1997.
- [8] A. S. Pikovsky, M. G. Rosenblum, G. V. Osipov, and J. Kurths, "Phase synchronization of chaotic oscillators by external driving," *Physica D: Nonlinear Phenomena*, vol. 104, no. 3-4, pp. 219–238, 1997.
- [9] A. Pikovsky, M. Rosenblum, and J. Kurths, *Synchronization: a universal concept in nonlinear sciences*, vol. 12 of *Cambridge nonlinear science series*. New York: Cambridge University Press, 2001.
- [10] G. M. Ramírez Ávila, J. L. Guisset, and J. L. Deneubourg, "Synchronous behavior in small populations of light-controlled oscillators," in *11th International IEEE Workshop on Nonlinear Dynamics of Electronic Systems* (R. Stoop, ed.), (Scuol/Schuls, Switzerland), pp. 201–204, 2003.