

## MODELO PARA GALAXIAS ESPIRALES

Urzagasti D.

*Instituto de Investigaciones Físicas  
Universidad Mayor de San Andrés  
La Paz-Bolivia*

### RESUMEN

Se presenta un modelo de galaxias espirales obtenido con la resolución de las ecuaciones de fluido normalizadas con la densidad de Hubble y el radio de retorno de capas que se alejan de la expansión homogénea de Hubble. Con esto, el problema se convierte en autosimilar. Se consideran dos componentes: gas colisional y materia no colisional (materia oscura y estrellas), cuya única interacción es la gravitatoria. Para la resolución se realizan ciertas aproximaciones: primero se hallan las soluciones correspondientes a valores grandes de la variable autosimilar y luego se utilizan estas soluciones para linealizar las ecuaciones originales, adoptando, además, condiciones de equilibrio hidrostático en las direcciones distintas a la radial. Se consideran procesos de formación estelar a través de términos de sumidero de masa, momento y energía que son adicionados a las ecuaciones de fluido. Se hallan soluciones para las variables termodinámicas y para el campo de velocidades que reproducen de buena manera la estructura de brazos (se consideran soluciones con dos brazos), la forma de disco y las curvas de rotación de galaxias espirales. El modelo también es aplicable a la representación de la estructura y dinámica de la materia no colisional. En particular, se obtiene la estructura y dinámica de la componente de estrellas formadas. El modelo es confrontado con observaciones. Para ello se realizan ajustes a la estructura de brazos de las galaxias NGC 157 y NGC 5247 y a las curvas de rotación de las galaxias NGC 3198 y NGC 342, obteniendo un buen acuerdo en ambos casos.

### 1. INTRODUCCIÓN

Existen soluciones para el colapso cosmológico secundario sobre una perturbación sobredensa inicial [1,3]. Ellas corresponden a un colapso esférico de un fluido politrópico que progresivamente se aleja de la expansión homogénea de Hubble. Luego de que una primera capa se aleja de la expansión y comienza a colapsar, otras capas le siguen, alcanzando un radio máximo de expansión,  $r_{ta}(t) \propto t^{8/9}$ , y colapsando luego hacia la perturbación central. Bertschinger [1] considera un gas colisional (dissipativo) y con simetría esférica que, luego de alejarse de la expansión, es alcanzado por un choque, de manera que el fluido llegue al reposo en el centro de la distribución, evitando así que las capas de masa colapsantes se crucen. También, décadas atrás (Burbidge [9]), se ha considerado la formación de estructuras galácticas con brazos espirales. La forma planteada en este caso consiste de una función armónica cuya fase no sólo es función de la variable angular sino también de la variable radial (distancia al centro galáctico) y del tiempo. En el modelo planteado aquí se presenta un punto de vista alternativo: Además del gas colisional se considera también la presencia de materia no colisional (materia oscura y estrellas); el gas no es alcanzado por un choque, de manera que, luego de alejarse de la expansión, se da el colapso hacia la perturbación central; adicionalmente, la materia está animada de rotación, de forma que, a medida que el

sistema colapsa, el gas adquiere una estructura de brazos espirales que van enrollándose progresivamente; y si se consideran velocidades polares no despreciables (el eje de rotación define los polos galácticos) el sistema se condensa hacia el plano de simetría dando una estructura de disco.

### 2. MODELO

#### 2.1. Ecuaciones de partida

Se considera un fluido con interacción gravitatoria, cuyo comportamiento está descrito por las ecuaciones de continuidad, de Euler y del flujo de energía, las cuales, respectivamente, son:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0,$$

$$\frac{d}{dt} \vec{v} + \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p = \vec{g}, \quad (1)$$

$$\frac{d}{dt} (p \rho^{-\gamma}) = 0,$$

donde  $\rho$  es la densidad,  $\vec{v}$  es la velocidad,  $p$  es la presión,  $\gamma$  es el índice politrópico y  $\vec{g}$  es la aceleración gravitatoria.

La aceleración gravitatoria tiene la siguiente expresión:

$$\vec{g} = G\vec{\nabla} \int \frac{\rho_T(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} d^3\vec{r}', \quad (2)$$

$$\rho_T = \rho + \rho_{NC}.$$

Aquí  $\rho_T$  es la densidad total de materia: incluye la densidad del gas colisional,  $\rho$ , y la densidad de la materia no colisional  $\rho_{NC}$ .

En el caso de la materia no colisional debe considerarse una presión nula en las anteriores ecuaciones.

### 2.2. Normalización

Para la normalización de las variables dependientes e independientes se usan la densidad de Einstein-De Sitter [2],

$$\rho_H(t) = \frac{1}{6\pi G t^2}, \quad (3)$$

y el radio de retorno de las capas de masa colapsantes [1],

$$r_{ta}(t) = \tau(t)^{8/9} \propto t^{8/9}. \quad (4)$$

La normalización, en términos del sistema de coordenadas esféricas, se da de la siguiente manera:

a. Posición:

$$\vec{R}(\vec{r}, t) = (\lambda, \theta, \phi), \quad \lambda = \frac{r}{r_{ta}(t)}, \quad (5)$$

b. Velocidad:

$$\vec{v}(\vec{r}, t) = \frac{r_{ta}(t)}{t} \vec{V}(\lambda, \theta, \phi), \quad (6)$$

c. Densidad:

$$\rho(\vec{r}, t) = \rho_H(t) D(\lambda, \theta, \phi), \quad (7)$$

d. Presión:

$$p(\vec{r}, t) = \rho_H(t) \left(\frac{r_{ta}(t)}{t}\right)^2 P(\lambda, \theta, \phi), \quad (8)$$

e. Masa:

$$m(\vec{r}, t) = \frac{4}{3}\pi\rho_H(t)r_{ta}(t)^3 M(\lambda, \theta, \phi), \quad (9)$$

El radio de retorno es la única escala de longitud que es función del tiempo, por tanto, con la anterior normalización, el sistema resulta ser autosimilar, es decir, dada la escala fija  $\lambda$ , es invariable en forma y apariencia para todas las escalas  $r = \lambda\tau^{8/9}$ .

Con las variables así normalizadas, las ecuaciones (1) toman las siguientes formas adimensionales:

$$\vec{\nabla}_{\vec{R}} \cdot (D\vec{V}) - 2D - \frac{8}{9}\lambda D' = 0$$

$$\vec{V} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{R}} \vec{V} - \frac{1}{9}\vec{V}^2 - \frac{8}{9}\lambda\vec{V}' + \frac{1}{D}\vec{\nabla}_{\vec{R}} P = \frac{2}{9}\vec{\nabla}_{\vec{R}} \int \frac{D_T(\vec{R}'')}{|\vec{R}-\vec{R}''|} d^3\vec{R}'',$$

$$\vec{V} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{R}} \left(\frac{P}{D}\right) - \frac{2}{9}\frac{P}{D} - \frac{8}{9}\lambda\left(\frac{P}{D}\right)' + (\gamma - 1)\frac{P}{D}\vec{\nabla}_{\vec{R}} \cdot \vec{V} = 0, \quad (10)$$

donde las primas indican derivadas parciales respecto de  $\lambda$ .

### 2.3. Forma explícita de las ecuaciones en coordenadas esféricas

Siendo

$$\vec{V} = (V_\lambda, V_\theta, V_\phi) \quad (11)$$

la velocidad adimensional expresada en términos de sus componentes en coordenadas esféricas y dadas las siguientes definiciones:

$$\chi = \cos\theta,$$

$$u_\lambda = V_\lambda, \quad u_\theta = (1 - \chi^2)^{1/2} V_\theta, \quad (12)$$

$$u_\phi = \frac{V_\phi}{(1 - \chi^2)^{1/2}}, \quad \eta = \frac{P}{D},$$

$$Z = \int \frac{D_T(\vec{R}'')}{|\vec{R}-\vec{R}''|} d^3\vec{R}'',$$

las ecuaciones (10) toman las siguientes formas explícitas en coordenadas esféricas:

$$(u_\lambda - \frac{8}{9}\lambda)D' + \frac{2}{\lambda}Du_\lambda + Du'_\lambda - 2D - \frac{1}{\lambda}(D\frac{\partial}{\partial\chi}u_\theta + u_\theta\frac{\partial}{\partial\chi}D) + \frac{1}{\lambda}(D\frac{\partial}{\partial\phi}u_\phi + u_\phi\frac{\partial}{\partial\phi}D) = 0, \quad (13)$$

$$(u_\lambda - \frac{8}{9}\lambda)u'_\lambda - \frac{1}{9}u_\lambda - \frac{1}{\lambda}u_\theta\frac{\partial}{\partial\chi}u_\lambda + \frac{1}{\lambda}u_\phi\frac{\partial}{\partial\phi}u_\lambda + \eta' + \eta\frac{D'}{D} = \frac{2}{9}Z', \quad (14)$$

$$(u_\lambda - \frac{8}{9}\lambda)u'_\theta - \frac{1}{9}u_\theta - \frac{1}{\lambda}u_\theta\frac{\partial}{\partial\chi}u_\theta + \frac{1}{\lambda}(u_\phi\frac{\partial}{\partial\phi}u_\theta - \frac{\chi}{1-\chi^2}u_\theta^2) - \frac{1-\chi^2}{\lambda}(\frac{\partial}{\partial\chi}\eta + \frac{\eta}{D}\frac{\partial}{\partial\chi}D) = -\frac{2}{9}\frac{1-\chi^2}{\lambda}\frac{\partial}{\partial\chi}Z, \quad (15)$$

$$(u_\lambda - \frac{8}{9}\lambda)u'_\phi - \frac{1}{9}u_\phi + \frac{1}{\lambda}u_\phi\frac{\partial}{\partial\phi}u_\phi - \frac{1}{\lambda}u_\theta(\frac{\partial}{\partial\chi}u_\phi - \frac{\chi}{1-\chi^2}u_\phi) + \frac{1}{\lambda(1-\chi^2)}(\frac{\partial}{\partial\phi}\eta + \frac{\eta}{D}\frac{\partial}{\partial\phi}D) = \frac{2}{9}\frac{1}{\lambda(1-\chi^2)}\frac{\partial}{\partial\phi}Z, \quad (16)$$

$$(u_\lambda - \frac{8}{9}\lambda)\eta' - \frac{2}{9}\eta - \frac{1}{\lambda}u_\theta\frac{\partial}{\partial\chi}\eta + \frac{1}{\lambda}u_\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\eta + (\gamma - 1)\eta(\frac{2}{\lambda}u_\lambda + u'_\lambda - \frac{1}{\lambda}\frac{\partial}{\partial\chi}u_\theta + \frac{1}{\lambda}\frac{\partial}{\partial\phi}u_\phi) = 0. \quad (17)$$

### 2.4. Aproximación radial

Como una primera aproximación, se consideran las soluciones para  $\lambda$  suficientemente grande, a la cual se llama aquí la aproximación radial. Con ésta consideración, las ecuaciones (13—17) se reducen a las formas:

$$\begin{aligned}
\lambda D' + \frac{9}{4}D &= 0, \\
-\frac{8}{9}\lambda u'_\lambda - \frac{1}{9}u_\lambda - \eta' + \eta \frac{D'}{D} &= \frac{2}{9}Z', \\
\lambda u'_\theta + \frac{1}{8}u_\theta &= 0, \\
\lambda u'_\phi + \frac{1}{8}u_\phi &= 0, \\
\lambda \eta' + \frac{1}{4}\eta &= 0,
\end{aligned} \tag{18}$$

con soluciones (representadas con el supraíndice  $r$  para esta aproximación):

$$\begin{aligned}
D^r &= D_0 \lambda^{-9/4}, \quad Z^r = \frac{64\pi}{3} D_0 (1 + \epsilon) \lambda^{-1/4}, \\
u_\lambda^r &= A_0 \lambda^{-1/8} + [\frac{5}{2}\eta_0 - \frac{32\pi}{27}(1 + \epsilon)D_0] \lambda^{-5/4}, \\
u_\phi^r &= v_0 \lambda^{-1/8}, \quad u_\theta^r = a_0 \lambda^{-1/8}, \\
\eta^r &= \eta_0 \lambda^{-1/4},
\end{aligned} \tag{19}$$

Bajo esta aproximación, la integral de la contribución gravitatoria del fluido,  $Z$ , resulta proporcional al factor  $(1 + \epsilon)$ , donde  $\epsilon$  es el cociente entre la masa de la materia no colisional y la masa del gas colisional.

### 2.5. Parámetros

Primeramente se considera el parámetro de soporte rotacional, definido como el cociente entre la aceleración gravitatoria y la aceleración centrífuga:

$$\beta_g^2 = \frac{g}{g_\phi} = \frac{Gm(r)}{v_c(r)^2 r} = \frac{32\pi D_0 (1 + \epsilon)}{27 v_0^2}, \tag{20}$$

donde  $v_c$  es la velocidad circular del fluido y  $m(r)$  la masa total dentro del radio  $r$ . Para hallar la última igualdad se ha usado la aproximación radial.

Análogamente se tiene el cociente entre la aceleración del gradiente de presión radial y la aceleración centrífuga:

$$\beta_p^2 = -\frac{r \frac{\partial p}{\partial r}}{v_c(r)^2 \rho(r)} = \frac{5}{2} \frac{\eta_0}{v_0^2}. \tag{21}$$

donde, como antes, se ha usado la aproximación radial para obtener la última igualdad.

Luego, es conveniente introducir el parámetro

$$\chi_0^2 = \beta_g^2 - \beta_p^2 \tag{22}$$

para medir el grado en que los efectos gravitacionales y de los gradientes de presión radial se diferencian.

También se definen las amplitudes de las velocidades  $u_\lambda^r$  y  $u_\theta^r$  en términos de la amplitud de la velocidad circular:

$$\sigma_\lambda = \frac{A_0}{v_0}, \quad \sigma_\theta = \frac{a_0}{v_0}. \tag{23}$$

De esta manera, dichas velocidades quedan expresadas como:

$$u_\lambda^r = v_0 \sigma_\lambda \lambda^{-1/8} - v_0^2 \chi_0^2 \lambda^{-5/4}, \quad u_\theta^r = v_0 \sigma_\theta \lambda^{-1/8}. \tag{24}$$

Por último, es útil introducir un parámetro que mida el grado en el que el efecto del segundo término en  $u_\lambda^r$  se aparta del efecto del primero, a éste se define como  $\Omega_0$ :

$$\chi_0^2 = \frac{9}{32} (\Omega_0^2 + \sigma_\lambda^2). \tag{25}$$

### 2.6. Equilibrio Hidrostático

En este modelo se consideran condiciones de equilibrio hidrostático en las direcciones  $\hat{\theta}$  y  $\hat{\phi}$ , en tal caso se anula la suma de los términos de gradientes de presión y gravitacionales de las siguientes expresiones correspondientes a esas direcciones:

$$\frac{\partial}{\partial \chi} \eta + \frac{\eta}{D} \frac{\partial D}{\partial \chi} - \frac{2}{9} \frac{\partial Z}{\partial \chi} = 0, \tag{26}$$

$$\frac{\partial}{\partial \phi} \eta + \frac{\eta}{D} \frac{\partial D}{\partial \phi} - \frac{2}{9} \frac{\partial Z}{\partial \phi} = 0.$$

En el caso radial no se da el equilibrio hidrostático a menos que  $\chi_0^2 = 0$ .

### 2.7. Formación Estelar

Se modelan los efectos de procesos de formación estelar introduciendo términos de sumidero de masa, momento y energía en las ecuaciones (1):

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = \left( \frac{\partial}{\partial t} \rho \right)_s,$$

$$\frac{d}{dt} \vec{v} + \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p = \vec{g} + \left( \frac{\partial}{\partial t} \vec{v} \right)_s, \tag{27}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{p}{\rho} + \frac{p}{\rho} (\gamma - 1) \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \left( \frac{\partial}{\partial t} \frac{p}{\rho} \right)_s,$$

donde  $s$  denota a esos términos.

Se plantean las siguientes formas para los términos de sumidero:

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} \rho \right)_s = \alpha \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{v},$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} \rho \vec{v} \right)_s = \alpha \vec{v} \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{v}, \tag{28}$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} \frac{p}{\rho} \right)_s = \alpha \frac{p}{\rho} (\gamma - 1) \vec{\nabla} \cdot \vec{v},$$

de manera de tener:

$$\frac{d}{dt} \rho = (\alpha - 1) \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{v},$$

$$\frac{d}{dt} (\rho \vec{v}) = -\vec{\nabla} p + \rho \vec{g} + (\alpha - 1) \vec{v} \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{v}, \tag{29}$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{p}{\rho} \right) = (\alpha - 1) (\gamma - 1) \frac{p}{\rho} \vec{\nabla} \cdot \vec{v},$$

con

$$0 \leq \alpha < 1 \tag{30}$$

Así, por ejemplo, si  $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} < 0$  y  $\alpha > 0$ , se tiene  $d\rho/dt > 0$ , pero a una tasa menor debido a la formación de estrellas. El parámetro  $\alpha$  determina la intensidad de los procesos de formación estelar.

Con la introducción de la formación estelar, las ecuaciones normalizadas (14), (15) y (16) no cambian de forma, pero las ecuaciones (13) y (17) se modifican a las formas:

$$\begin{aligned} (u_\lambda - \frac{8}{9}\lambda)D' + (1-\alpha)\frac{2}{\lambda}Du_\lambda + (1-\alpha)Du'_\lambda - 2D \\ - \frac{1}{\lambda}[(1-\alpha)D\frac{\partial}{\partial\chi}u_\theta + u_\theta\frac{\partial}{\partial\chi}D] \\ + \frac{1}{\lambda}[(1-\alpha)D\frac{\partial}{\partial\phi}u_\phi + u_\phi\frac{\partial}{\partial\phi}D] = 0, \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} (u_\lambda - \frac{8}{9}\lambda)\eta' - \frac{2}{9}\eta - \frac{1}{\lambda}u_\theta\frac{\partial}{\partial\chi}\eta + \frac{1}{\lambda}u_\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\eta \\ + (1-\alpha)(\gamma-1)\eta(\frac{2}{\lambda}u_\lambda + u'_\lambda - \frac{1}{\lambda}\frac{\partial}{\partial\chi}u_\theta + \frac{1}{\lambda}\frac{\partial}{\partial\phi}u_\phi) = 0, \end{aligned} \quad (32)$$

respectivamente.

### 2.8. Linealización de las Ecuaciones

Como siguiente aproximación se introducen los resultados de la aproximación radial en los coeficientes y términos de inhomogeneidad de las ecuaciones (14—16) y (31—32). Como resultado, todas ellas quedan con las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} (u_\lambda^r - \frac{8}{9}\lambda)D' + (1-\alpha)D(\frac{2}{\lambda}u_\lambda^r + u_\lambda^{r'}) - 2D \\ - \frac{1}{\lambda}u_\theta^r\frac{\partial}{\partial\chi}D + \frac{1}{\lambda}u_\phi^r\frac{\partial}{\partial\phi}D = 0, \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} (u_\lambda^r - \frac{8}{9}\lambda)u'_\lambda - \frac{1}{9}u_\lambda - \frac{1}{\lambda}u_\theta^r\frac{\partial}{\partial\chi}u_\lambda + \frac{1}{\lambda}u_\phi^r\frac{\partial}{\partial\phi}u_\lambda \\ + \eta(\frac{2r'}{\eta r} + \frac{Dr'}{Dr}) = \frac{2}{9}D\frac{Zr'}{Dr}, \end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} (u_\lambda^r - \frac{8}{9}\lambda)u'_\theta - \frac{1}{9}u_\theta - \frac{1}{\lambda}u_\theta^r\frac{\partial}{\partial\chi}u_\theta + \frac{1}{\lambda}u_\phi^r\frac{\partial}{\partial\phi}u_\theta \\ - \frac{1}{\lambda}\frac{\chi}{1-\chi^2}u_\theta^r u_\theta = 0, \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} (u_\lambda^r - \frac{8}{9}\lambda)u'_\phi - \frac{1}{9}u_\phi - \frac{1}{\lambda}u_\theta^r\frac{\partial}{\partial\chi}u_\phi + \frac{1}{\lambda}u_\phi^r\frac{\partial}{\partial\phi}u_\phi \\ + \frac{1}{\lambda}\frac{\chi}{1-\chi^2}u_\theta^r u_\phi = 0, \end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{aligned} (u_\lambda^r - \frac{8}{9}\lambda)\eta' - \frac{2}{9}\eta - \frac{1}{\lambda}u_\theta^r\frac{\partial}{\partial\chi}\eta + \frac{1}{\lambda}u_\phi^r\frac{\partial}{\partial\phi}\eta \\ + (1-\alpha)(\gamma-1)\eta(\frac{2}{\lambda}u_\lambda^r + u_\lambda^{r'}) = 0. \end{aligned} \quad (37)$$

### 2.9. Soluciones

Se plantea la siguiente forma general para las soluciones del conjunto (33—37):

$$A = e^{k(\psi(\lambda)+|\chi|)} \sum_m A_m(\lambda, \chi) e^{im(\varphi(\lambda)+\phi)}, \quad (38)$$

donde  $k \leq 0$  es un parámetro que sirve para dar el grado de achatamiento del sistema, y donde las funciones  $\psi$  y  $\varphi$  obedecen las ecuaciones:

$$(u_\lambda^r - \frac{8}{9}\lambda)\psi' - \frac{1}{\lambda}u_\theta^r = 0 \quad (39)$$

y

$$(u_\lambda^r - \frac{8}{9}\lambda)\varphi' + \frac{1}{\lambda}u_\phi^r = 0. \quad (40)$$

Definiendo la variable

$$\mu = \lambda^{-9/8}, \quad (41)$$

las soluciones de (39) y (40) son:

$$\psi(\mu) = \frac{16}{9}\sigma_\theta U(\mu), \quad \varphi(\mu) = -\frac{16}{9}U(\mu), \quad (42)$$

donde

$$U(\mu) = \frac{1}{\Omega_0} \tan^{-1} \left\{ \frac{2v_0\chi_0^2\mu + \sigma_\lambda}{\Omega_0} \right\}. \quad (43)$$

En lo que se refiere a las soluciones en la variable  $\phi$ , en este modelo se consideran sólo los términos correspondientes a  $m = 0$  y  $m = 2$ ; ésto con el fin de obtener una estructura de dos brazos espirales en la distribución de la materia. Entonces las soluciones tienen como factor a la función:

$$Q(\lambda, \phi) = 1 + \delta \cos(2[\varphi(\lambda) + \phi]), \quad (44)$$

donde  $\delta$  es un parámetro que sirve para regular el grado de contraste de los brazos en el modelo.

Definiendo las funciones

$$b(\mu) = \frac{9}{8}(v_0^2\chi_0^2\mu^2 - v_0\sigma_\lambda\mu) + 1, \quad (45)$$

$$W(\mu) = U(\mu) - U(0),$$

las soluciones son las siguientes:

$$D = D_0 \frac{\mu^2}{b(\mu)^{(2+\alpha)/3}} e^{-\frac{2}{3}(1-4\alpha)\sigma_\lambda W(\mu)} e^{k(\psi(\mu)+|\chi|)} Q(\mu, \phi), \quad (46)$$

$$\begin{aligned} \eta = \eta_0 \frac{\mu^{2/9}}{b(\mu)^{[\frac{1}{3}-(\gamma-1)(1-\alpha)]/3}} e^{-\frac{8}{3}[(\gamma-1)(1-\alpha)-\frac{1}{12}]\sigma_\lambda W(\mu)} \\ \times e^{k(\psi(\mu)+|\chi|)} Q(\mu, \phi), \end{aligned} \quad (47)$$

$$V_\phi = v_0 \frac{\mu^{1/9}}{b(\mu)^{1/18}} e^{\frac{1}{3}\sigma_\lambda W(\mu)} e^{k(\psi(\mu)+|\chi|)} Q(\mu, \phi), \quad (48)$$

$$V_\theta = \sigma_\theta V_\phi, \quad (49)$$

$$V_\lambda = V_\phi [\sigma_\lambda + v_0 \{ \beta_p^2 \int_0^\mu e^{-\frac{8}{3}[(\gamma-1)(1-\alpha) - \frac{1}{24}]\sigma_\lambda W(\mu')} \frac{d\mu'}{b(\mu')^{[\frac{10}{6} - (\gamma-1)(1-\alpha)]/3}} - \beta_g^2 \int_0^\mu e^{-\frac{7}{3}[\frac{7}{3} - 8\alpha]\sigma_\lambda W(\mu')} \frac{d\mu'}{b(\mu')^{[\frac{20}{6} + \alpha]/3}} \} ] \quad (50)$$

Estas soluciones son aplicables tanto al gas colisional como a la materia no colisional. En el caso de la materia no colisional debe tomarse  $\eta_0 = 0$  y hacer el cambio  $\alpha \rightarrow -\alpha$ .

### 3. ESTRUCTURA OBTENIDA

Se aplica la solución para  $D$  dada en la sección anterior a fin de visualizar la estructura del gas colisional correspondiente a ciertos valores de los parámetros del modelo (Figura 1). Como puede verse, se obtiene una estructura de disco con dos brazos espirales que se van enrollando progresivamente hacia el centro de la distribución, dando la imagen de una galaxia espiral.

Considerando los mismos valores de los parámetros dados en la Figura 1, en la Figura 2 se muestra el perfil de densidad, en la Figura 3 se grafica la función  $\eta$  y en la Figura 4 se da la velocidad circular promediada en la variable  $\phi$ . En los tres casos se considera  $\chi = 0$ , es decir, la variable  $\lambda$  es la distancia al centro de la distribución medida sobre el plano  $z = 0$ . La forma de la curva de rotación es semejante a las obtenidas observacionalmente para galaxias espirales, con una región empinada al comienzo y una forma casi plana para valores mayores de la distancia al centro.

### 4. COMPORTAMIENTOS ASINTÓTICOS

#### 4.1. Caso $\lambda \gg 1$

En este caso se tiene que:

$$\begin{aligned} V_\lambda &\propto V_\theta \propto V_\phi \propto \lambda^{-1/8}, \\ D &\propto \lambda^{-9/4}, \\ \eta &\propto \lambda^{-1/4} \rightarrow P \propto \lambda^{-5/2}, \\ M &\propto \lambda^{3/4}. \end{aligned} \quad (51)$$

Los cuales son los escalamientos dominantes encontrados por Bertschinger en el colapso secundario esférico [1].

#### 4.2. Caso $\lambda \ll 1$

Para este caso:

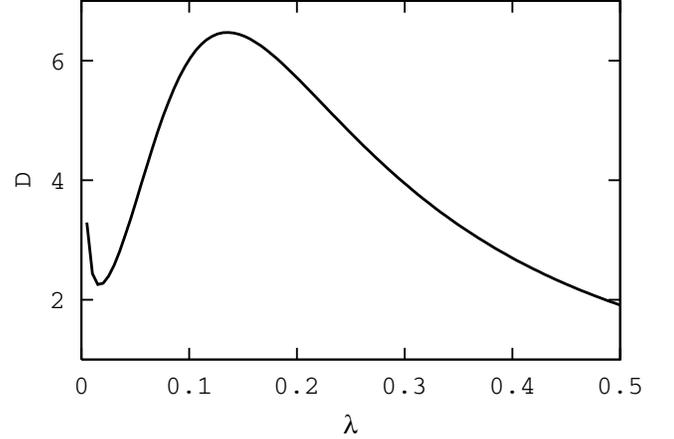


Figura 2. Perfil de densidad para los valores de los parámetros dados en la Figura 1 y para  $\chi = 0$ .

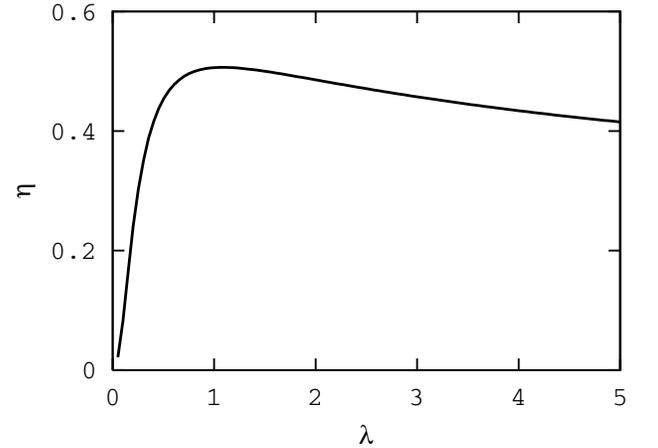


Figura 3. Función  $\eta$  para los valores de los parámetros dados en la Figura 1 y para  $\chi = 0$ .

$$\begin{aligned} V_\lambda &\propto V_\theta \propto V_\phi \propto 1, \\ D &\propto \lambda^{-\frac{3}{4}(1-\alpha)}, \\ \eta &\propto \lambda^{-\frac{3}{4}(\gamma-1)(1-\alpha)} \rightarrow P \propto \lambda^{-\frac{3}{4}\gamma(1-\alpha)}, \\ M &\propto \lambda^{\frac{3}{4}(1+\alpha/3)}. \end{aligned} \quad (52)$$

Notemos que a pesar de que la densidad diverge hacia el origen, la masa tiende a cero cuando  $\lambda \rightarrow 0$ .

### 5. APLICACIÓN DEL MODELO

A fin de contrastar el modelo obtenido con datos observacionales, se realizan dos ajustes a la estructura de brazos de dos galaxias espirales y otros dos ajustes a las

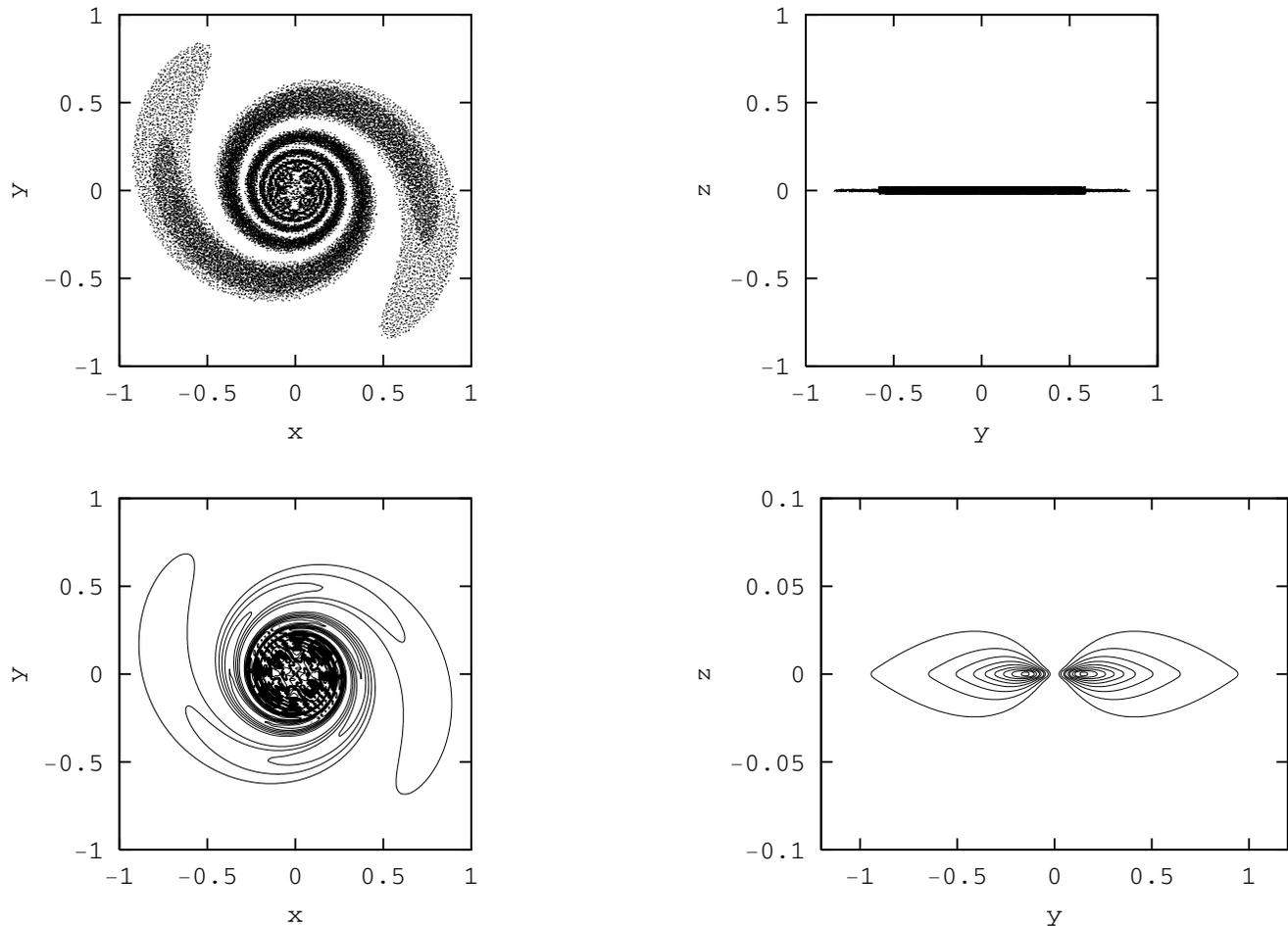


Figura 1. Estructura obtenida y contornos de densidad para  $v_0 = 2$ ,  $\sigma_\lambda = -5 \times 10^{-3}$ ,  $\sigma_\theta = 5 \times 10^{-3}$ ,  $\Omega_0 = 0,05$ ,  $k = -25$ ,  $\alpha = 0$  y  $\delta = 1$  (para una mejor apreciación, se ha ensanchado el tamaño vertical de la imagen de los contornos de densidad en el plano  $(x,z)$ ).

TABLA 1

Parámetros obtenidos con el ajuste a la estructura de brazos.

Galaxia	$v_0$	$\sigma_\lambda$	$\Omega_0$	$\chi_0^2$
NGC 157	21,8	-3,8	0,4	4,2
NGC 5247	59,2	-2,1	1,4	1,8

curvas de rotación de otras dos galaxias. Los resultados se dan a continuación:

### 5.1. Ajuste a la Estructura de Brazos

Se consideran dos galaxias espirales, NGC 157 y NGC 5247, cuyas inclinaciones respecto al plano perpendicular a la línea de visión pueden considerarse suficientemente pequeñas como para que los datos no se vean afectados apreciablemente por su efecto. Los datos de estas galaxias fueron obtenidos de la base de datos OSUBSGS (*Early Data Release*) [4] y consisten de

un conjunto de valores de intensidad en un arreglo bidimensional de *pixels*. La Figura 5 muestra las imágenes de estas dos galaxias.

El procedimiento se ha aplicado sólo a las trazas de los brazos espirales, es decir, se han elegido sólo los *pixels* correspondientes a los máximos locales en intensidad como trazadores de la estructura espiral. Estos puntos elegidos se muestran también en la Figura 5. Las posiciones de los mismos se refieren al punto correspondiente al *pixel* con la intensidad más alta, el cual es tomado como origen del sistema de coordenadas  $(x, y)$ .

Como se trata de los máximos locales de intensidad, se toma como función de ajuste aquella que se obtiene del máximo de la función  $Q(\mu, \phi)$ . Esta función resulta dependiente de cuatro parámetros, los cuales son los parámetros del ajuste, y tiene la forma:

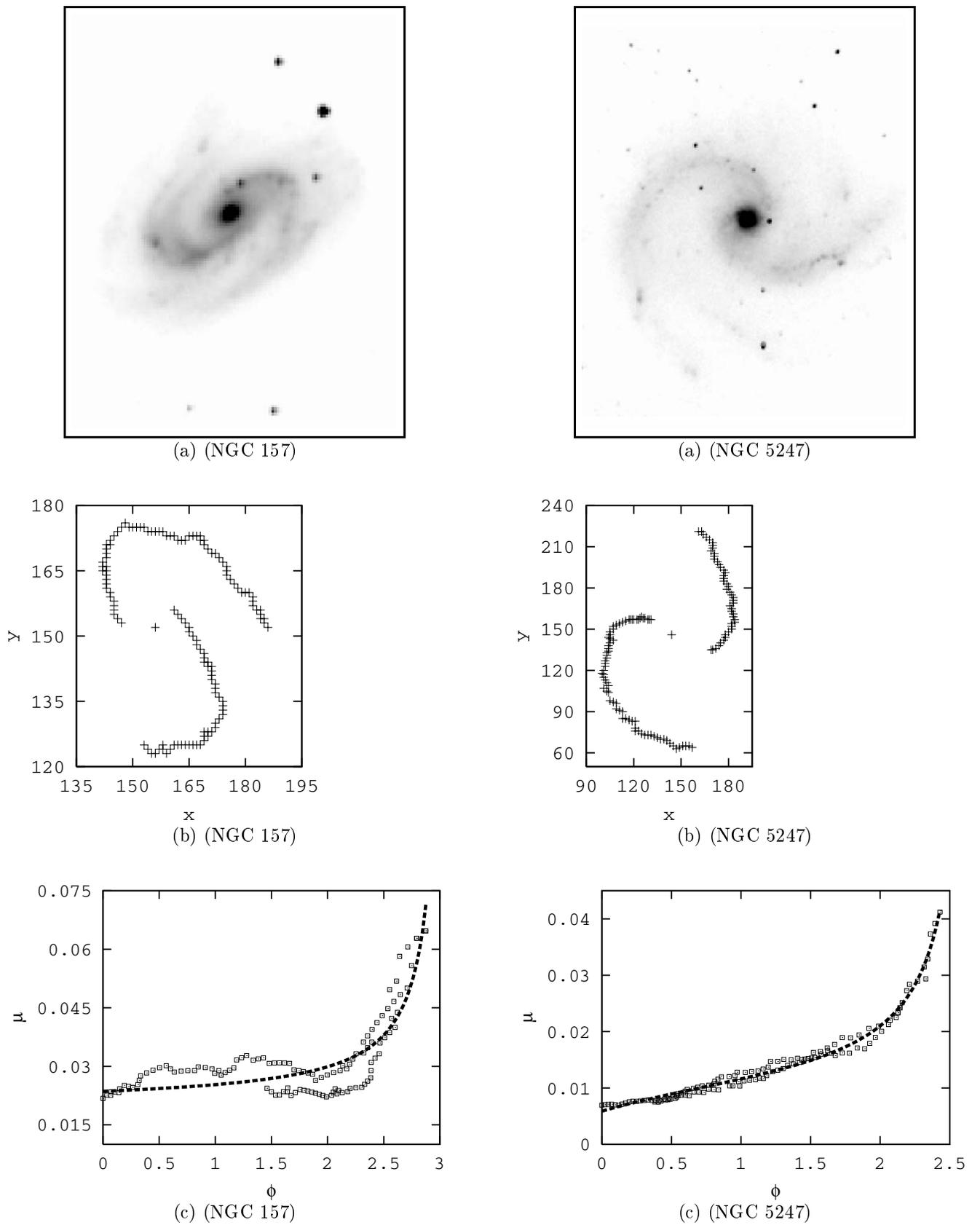


Figura 5. Análisis de la estructura de brazos: (a) Imágenes de las galaxias estudiadas (tomadas de ref. [4]), (b) Trazas de los brazos espirales. (c) Ajuste a las trazas de los brazos espirales.

TABLA 2

Parámetros obtenidos con el ajuste a la curva de rotación.

Galaxia	$v_0$	$\sigma_\lambda$	$\Omega_0$	$\chi_0^2$	$k\sigma_\theta$
NGC 3198	174,3	$-8,8 \times 10^{-3}$	$1,7 \times 10^{-2}$	$10^{-4}$	$-7,2 \times 10^{-3}$
NGC 342	355,8	$4 \times 10^{-3}$	0,01	$3,2 \times 10^{-5}$	$-3,5 \times 10^{-3}$

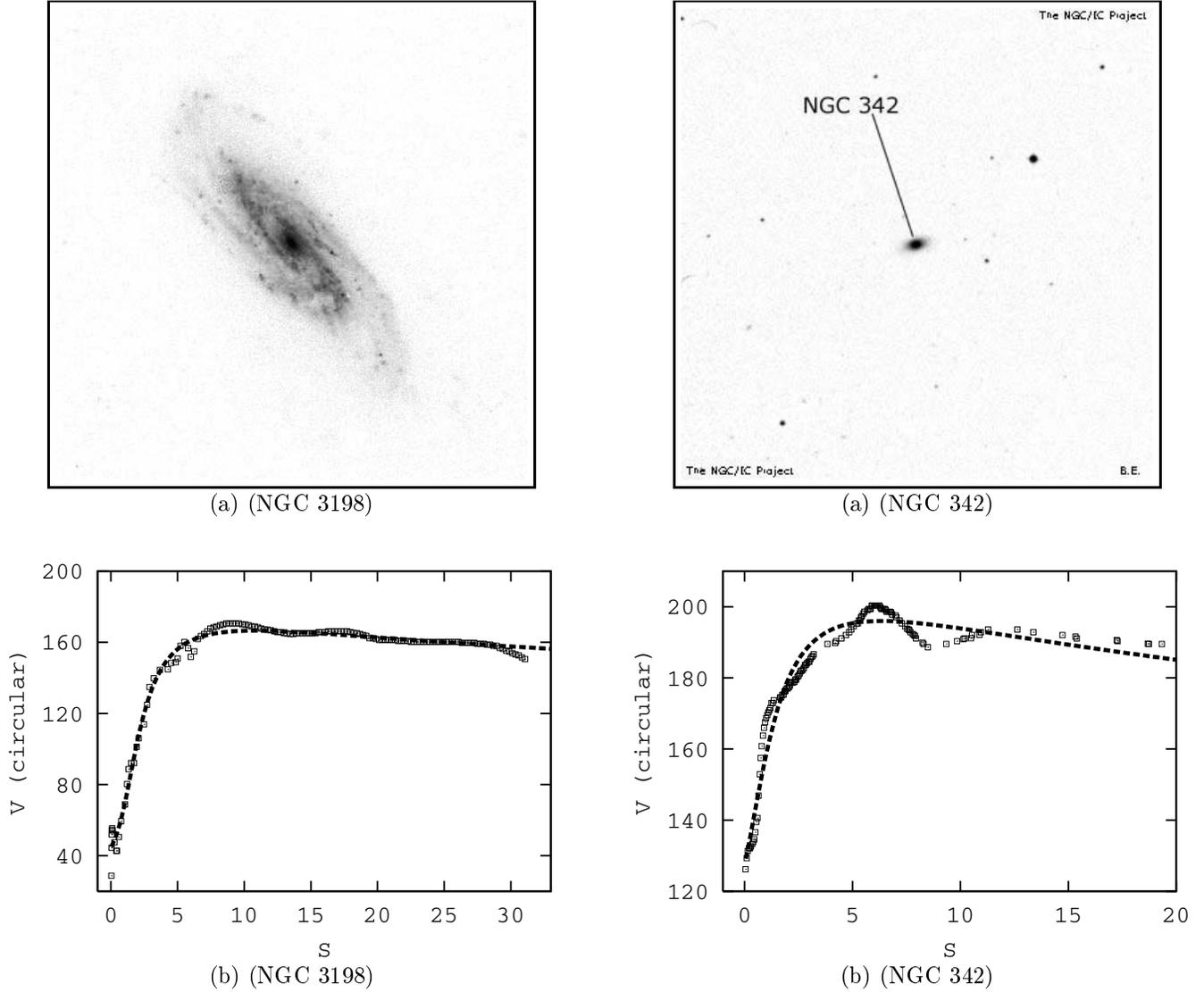


Figura 6. Análisis de la curva de rotación: (a) Imágenes de las galaxias estudiadas (tomadas de refs. [7] y [8]), (b) Ajuste a las curvas de rotación.

$$\mu(\phi) = a_1 \tan[a_2(\phi + a_3)] - a_4;$$

$$a_1 = \frac{\Omega_0}{2v_0\lambda_0^2}, \quad a_2 = \frac{9\Omega_0}{16}, \quad (53)$$

$$a_3 = \varphi_0, \quad a_4 = \frac{\sigma_\lambda}{2v_0\lambda_0^2},$$

donde  $\varphi_0$  es sólo un término de fase en  $Q(\mu, \phi)$ .

El ajuste es realizado con el método de Levenberg-

Marquardt [5], el cual es mostrado en la Figura 5. Los parámetros en cada caso son mostrados en la Tabla 1.

### 5.2. Ajuste a la Curva de Rotación

Se aplica el modelo obtenido a las curvas de rotación de las galaxias NGC 3198 y NGC 342, cuyas imágenes se muestran en la Figura 6. Los datos fueron tomados de la ref. [6]. Se utiliza como función de ajuste la función  $V_\phi$  (ec. 48) promediada en la variable  $\phi$  y valuada en

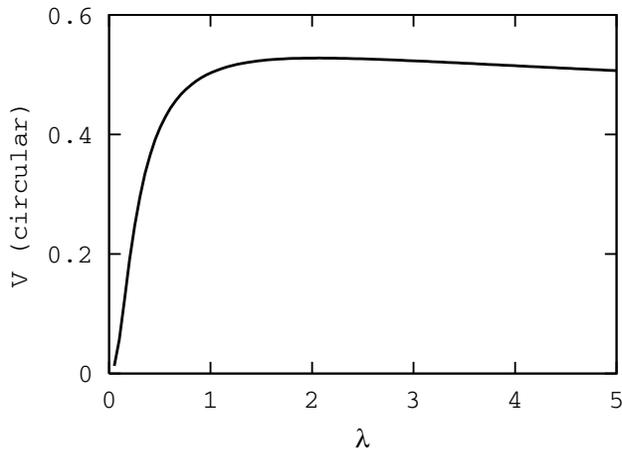


Figura 4. Curva de rotación en las que se representa la velocidad circular promediada en  $\phi$  como función del radio en el plano  $z = 0$ . Se toman los valores de los parámetros dados en la Figura 1.

$\chi = 0$ , la cual también puede ser expresada en términos de cuatro parámetros de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 V(S) = \langle V_\phi \rangle(S) &= \frac{a_1 S^{1/9}}{[(a_3 S - a_4)^2 + 1]^{1/8}} e^{a_2 \tan^{-1}(a_3 S + a_4)}, \\
 a_1 &= v_0 (1 + a_4^2)^{1/8} e^{-\frac{\sigma_\lambda}{9\Omega_0} \tan^{-1}(\frac{\sigma_\lambda}{\Omega_0})}, \\
 a_2 &= \frac{1}{9\Omega_0} (\sigma_\lambda + 16k\sigma_\theta), \\
 a_3 &= \frac{2v_0\lambda_0^2}{\Omega_0}, \quad a_4 = \frac{\sigma_\lambda}{\Omega_0},
 \end{aligned} \tag{54}$$

donde  $S$  es la distancia al centro galáctico medida sobre el plano  $z = 0$  ( $\chi = 0$ ).

Aquí también se utiliza el método de Levenberg-Marquardt [5] para realizar los ajustes. Éstos se muestran en la Figura 6 y los parámetros obtenidos son dados en la Tabla 2.

## 6. DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Se ha desarrollado un modelo para galaxias espirales en una situación correspondiente al colapso cosmológico autosimilar sobre una perturbación sobredensa inicial, posterior a la expansión de Hubble en un universo de Einstein-De Sitter ( $\Omega = 1$ ).

Se parte con las ecuaciones de un fluido ideal con interacción gravitatoria, la cual, tiene la contribución de dos componentes: el gas colisional (fluido con presión), conformado por el material interestelar, y la materia no colisional (fluido sin presión), conformada por materia oscura (posiblemente neutrinos) y estrellas. Además se propone un modelo que tome en cuenta los procesos de formación estelar a través de términos de sumidero de masa, momento y energía que son adicionados a

las ecuaciones del fluido. Luego se normalizan las variables y las ecuaciones usando la densidad, el radio de retorno y el tiempo de universo del modelo de expansión estándar, obteniendo un conjunto de ecuaciones hidrodinámicas que describen al sistema de forma autosimilar, donde la única escala espacial dependiente del tiempo es el radio de retorno. Realizada la normalización, las variables dependen sólo de las coordenadas esféricas ( $\lambda \propto rt^{-8/9}, \theta, \phi$ ). Dada la no linealidad de las ecuaciones resultantes se procede a realizar aproximaciones. Primero, en la aproximación radial, se considera el caso en el que  $\lambda$  es suficientemente grande y se obtienen soluciones puramente radiales a fin de calcular de forma simple el término de interacción gravitatoria y de linealizar las ecuaciones en una segunda aproximación. Hecho esto último, se integran las ecuaciones resultantes para obtener las soluciones del presente modelo.

Las soluciones obtenidas para las cantidades termodinámicas y el campo de velocidades presentan dos rasgos comunes, a saber: poseen los mismos factores de estructura espiral y de achatamiento hacia el plano de simetría perpendicular al eje de rotación. Aunque podrían considerarse diversos modos, se ha considerado sólo el modo que da una estructura de dos brazos espirales, la cual representa de buena manera la estructura de las dos galaxias que fueron consideradas a fin de realizar una comparación del modelo con las observaciones. El factor de estructura espiral posee un parámetro,  $\delta$  que define el grado de contraste de los brazos. Es de esperar que en una mejor aproximación este parámetro sea reemplazado por una función de  $\lambda$  a fin de tener  $\delta \rightarrow 0$  (desaparición de los brazos) para valores de  $\lambda$  suficientemente grandes. A este respecto debe resaltarse que el modelo obtenido no posee fronteras donde las cantidades cambien abruptamente sus valores a los dados por la expansión homogénea de Hubble, lo cual podría lograrse introduciendo una onda de choque que se propagase hacia fuera del centro de la distribución. De todas maneras, en el presente modelo todas las cantidades decaen siguiendo leyes de potencias de  $\lambda$  para valores de  $\lambda$  suficientemente grandes. Para estos casos, las amplitudes obtenidas concuerdan con las del escalamiento dominante en las soluciones del colapso secundario esférico [1]. Tal escalamiento tiene la forma  $D = \lambda^{-9/4} \tilde{D}(\lambda)$ ,  $P = \lambda^{-5/2} \tilde{P}(\lambda)$  y  $M = \lambda^{3/4} \tilde{M}(\lambda)$  para  $\gamma > 4/3$  y con  $\tilde{D}$ ,  $\tilde{P}$  y  $\tilde{M}$  finitas en el origen. En otras palabras, tenemos que el comportamiento asintótico de las soluciones del presente modelo para  $\lambda$  suficientemente grande coincide con el comportamiento asintótico de las soluciones del colapso secundario esférico para  $\lambda$  suficientemente pequeño (y  $\gamma > 4/3$ ). Sin embargo, esto no es siempre cierto para el caso de la velocidad radial, pues en el presente modelo esta se escala como  $V_\lambda \propto \sigma_\lambda \lambda^{-1/8}$  para  $\lambda$  suficientemente grande, mientras que en el colapso secundario esférico esta velocidad tiende a cero para  $\lambda$  que tiende a valores pequeños; la coincidencia se daría sólo en el caso  $\sigma_\lambda = 0$ . De cualquier manera, desaparece la necesidad de la introducción de un choque si se considera que las soluciones obtenidas

en este trabajo son válidas en las regiones más interiores de un sistema colapsante que se ha alejado de la expansión. Con respecto al factor de achatamiento, éste posee un parámetro,  $k$ , que da el grado de compactación del sistema galáctico hacia su plano de simetría. En una mejor aproximación, se esperaría que el grado de achatamiento disminuya a medida que  $\lambda$  crezca, de manera de tener soluciones con simetría esférica para valores de  $\lambda$  suficientemente grandes. Una posibilidad sería aquella en la cual  $k$  pueda ser reemplazado por una función de  $\lambda$  decreciente en valor absoluto. No se ha analizado ese caso aquí y queda como una cuestión pendiente al igual que el caso del parámetro  $\delta$  arriba mencionado.

La estructura obtenida es autosimilar, pues dada una escala  $\lambda$  fija, la estructura en una escala  $r$  al tiempo  $t$  es la misma estructura en una escala  $r' < r$  en un tiempo anterior  $t' < t$ , y viceversa. Así, puesto que el grado de enrollamiento de los brazos aumenta a medida que  $\lambda$  disminuye, dada una escala espacial fija, dentro de la misma el grado de enrollamiento de los brazos aumenta con el tiempo. Por otro lado, dada una escala  $\lambda$  fija, lo que determina el grado de enrollamiento es la amplitud de la velocidad circular  $v_0$ : a mayor valor de  $|v_0|$ , mayor el grado de enrollamiento. Puesto que el factor que determina la estructura de brazos,  $Q$ , se aplica a todas las soluciones, la velocidad es mayor en las regiones donde la densidad es mayor; en particular, la velocidad circular en las regiones donde los brazos son más intensos es mayor que la del resto.

Para valores muy pequeños de  $v_0^2 \chi_0^2$  y  $v_0 \sigma_\lambda$ , los comportamientos para todo  $\lambda$  no se alejan mucho de los comportamientos para  $\lambda \gg 1$ . En este caso, con valores muy pequeños de  $k$  y de  $\delta$ , las estructuras serían esferoidales (semejantes a las galaxias elípticas). En este punto aparece una cuestión más delicada: En las galaxias espirales observadas dominan dos componentes, una de disco, donde está el gas y se forman estrellas jóvenes, y otra de halo, donde se encuentran mayormente estrellas viejas y hay ausencia de gas. La del halo tiene una estructura esferoidal, con una densidad de estrellas que crece hacia el centro galáctico, dando la imagen de un bulbo central. Además, la rotación del halo es pequeña frente a la del disco. Estas diferencias indican que en una misma escala  $\lambda$  conviven dos estructuras para las cuales los parámetros del modelo serían diferentes. El modelo presentado aquí no puede explicar este dilema, se limita sólo a representar de buena manera ambos tipos de estructuras. Se podría pensar que inicialmente los parámetros eran los mismos para ambas componentes y que posteriormente al inicio del colapso éstos fueron cambiando debido a procesos de disipación y formación de estrellas.

En lo que respecta al modelo de formación estelar propuesto, éste ha permitido obtener la distribución de estrellas de todos los tipos formadas a partir de una componente gaseosa con parámetros de modelo definidos.

Sin embargo, este modelo aunque sencillo, dependiendo de un sólo parámetro,  $\alpha$ , debe confrontarse con las observaciones. Más aún, en una mejor aproximación, el parámetro  $\alpha$  debería ser reemplazado por una función de  $\lambda$ .

Las curvas de rotación obtenidas se ajustan de buen modo a las curvas observacionales de las dos galaxias consideradas. La forma empinada cerca del centro galáctico es fuertemente dependiente del parámetro  $k\sigma_\theta$ ; en las regiones alejadas del centro la forma tiende a ley de potencias  $\lambda^{-1/8}$ , que es la solución de la aproximación radial.

El modelo presentado en este trabajo reproduce los rasgos generales y típicos de las galaxias espirales, muestra un buen acuerdo con las observaciones y mantiene su característica autosimilar. A pesar de las aproximaciones realizadas y de que no puede explicar la presencia de más de una componente con parámetros distintos, representa de buena forma cada una de ellas dando las funciones termodinámicas, estructurales y dinámicas como funciones de la posición y del tiempo. En la discusión dada arriba se presentan algunas de las varias cuestiones pendientes a fin de lograr una mejor aproximación en posteriores trabajos.

## AGRADECIMIENTOS

Para la obtención de las imágenes y realización de los ajustes a la estructura, este trabajo ha hecho uso de datos pertenecientes al proyecto *the Ohio State University Bright Spiral Galaxy Survey*, que fue financiado por los presupuestos asignados *AST-9217716* y *AST-9617006* de la *United States National Science Foundation*, con soporte adicional de la *Universidad Ohio State University*. Se agradece con la mayor consideración a este Proyecto y a estas Instituciones el haber permitido hacer uso de estos datos.

## REFERENCIAS

- [1] Bertschinger, E. 1985, *Ap. J. (Supplement Series)*, 58, 39.
- [2] Peebles, P. J. E. 1993, *Principles of Physical Cosmology* (Princeton: Princeton University Press).
- [3] Urzagasti, D. 2001, *Revista Boliviana de Física*, N°7, Vol.1, 34.
- [4] Eskridge, P.B. et al., 2002, *ApJS*, 143, (in press). [astro-ph/0206320].
- [5] Press, W. H., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T., Flannery, B. P., *Numerical Recipes in FORTRAN, Second Edition*, Cambridge University Press, 1992.
- [6] Sofue, Y., 1996, 1997. [www.ioa.s.u-tokyo.ac.jp/~sofue/rotation/data.htm](http://www.ioa.s.u-tokyo.ac.jp/~sofue/rotation/data.htm).
- [7] [www.astro.princeton.edu/~frei/Gcat\\_htm/Catalog](http://www.astro.princeton.edu/~frei/Gcat_htm/Catalog).
- [8] [www.kepu.gov.cn/zlg/yuzhou/images/ngc/n0342.jpg](http://www.kepu.gov.cn/zlg/yuzhou/images/ngc/n0342.jpg).
- [9] Burbidge, E. M., *The Evolution of Spiral Structure, Structure and Evolution of the Galaxy*, editado por L. N. Mavridis, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht-Holland, 1971.