

# ESTUDIO DE LA SINCRONIZACIÓN EN UN SISTEMA DE DOS OSCILADORES IDÉNTICOS CONTROLADOS POR LUZ

G.M. Ramírez Ávila<sup>(I),(II)1</sup>, J.L. Guisset<sup>(I)</sup>, J.L. Deneubourg<sup>(I)</sup>

<sup>(I)</sup>Center for Nonlinear Phenomena and Complex Systems  
Université Libre de Bruxelles  
Campus Plaine CP231, 1050  
Brussels, Belgium

<sup>(II)</sup>Instituto de Investigaciones Físicas  
Universidad Mayor de San Andrés  
Casilla 8635  
La Paz, Bolivia

## RESUMEN

El análisis de un sistema de dos osciladores controlados por luz (LCOs) es realizado. Se comparan dos modelos diferentes y se demuestra que en el modelo más próximo al montaje experimental se encuentran resultados que están estrechamente relacionados con las medidas efectuadas experimentalmente. Se muestra analíticamente que el sistema de dos LCOs idénticos siempre sincroniza ya sea en fase o en antifase.

## 1. INTRODUCCIÓN

La sincronización, que puede ser entendida como el ajuste de ritmos entre dos o más osciladores debido a sus interacciones [1], es un fenómeno omnipresente tanto en sistemas naturales como artificiales y es un típico ejemplo de auto-organización. Este fenómeno descrito por primera vez por el científico holandés Christian Huygens en 1673 [2], quien observó sincronización en dos péndulos acoplados, permaneció durante más de dos siglos sin ser estudiado seriamente y es sólo en los años 20 del siglo pasado en que los trabajos de Eccles, Vincent [3], Appleton [4] y van der Pol [5], que observaron sincronización en generadores eléctricos, impulsaron a los científicos de la época a estudiar este fenómeno con mayor profundidad; principalmente por los que luego constituyeron la “escuela soviética”, entre los que destacan Blekhman [6], Arnol’d [7], Shilnikov, Afraimovich [8], Pikovsky [9], etc. quienes estudiaron tanto experimental como teóricamente la sincronización en diversos sistemas. El estudio de este fenómeno cobra popularidad hace aproximadamente 20 años, tiempo en el cual se produjeron diversidad de artículos y libros que tratan de una u otra manera sobre la sincronización en sistemas que van desde los biológicos (luciérnagas, grillos, cigarras, hormigas, sistemas ecológicos, diferentes comportamientos en poblaciones humanas, células cardíacas, neuronas, etc.) pasando por sistemas químicos (por ej. reacciones de Belousov–Zhabotinsky, osciladores bioquímicos) y llegando a sistemas artificiales como láseres, circuitos electrónicos, etc. En el presente artículo, primeramente presentamos en §2 el sistema de nuestro interés y los correspondientes modelos para su descripción. En §3, analiza-

mos los modelos propuestos y comparamos los resultados analíticos con las soluciones numéricas. Finalmente, en §4 damos a conocer las perspectivas de nuestra investigación actual.

## 2. DESCRIPCIÓN DE UN LCO Y MODELOS PARA SU COMPORTAMIENTO

Básicamente, un LCO es un oscilador de relajación en el sentido que posee dos escalas de tiempo caracterizadas por la variable de estado  $\epsilon(t)$ , una correspondiente al movimiento rápido que en el caso de nuestro LCO está asociada con el proceso de carga en la que  $\epsilon(t) = 1$  y la otra de movimiento lento, relacionada con la descarga del LCO y con  $\epsilon(t) = 0$ . Un LCO es un excelente ejemplo de oscilador de “integración y disparo” que son ampliamente utilizados para describir sistemas tales como poblaciones de luciérnagas, neuronas y células cardíacas. Un LCO funciona con una fuente de voltaje  $V_M$  (en general una batería común de 9 V) y está constituido por un chip temporizador LM555, el cual, funcionando en su configuración astable hace que se establezcan dos umbrales, uno superior en el que la carga se interrumpe cuando la señal alcanza  $2V_M/3$  pasando a su estado de descarga hasta alcanzar el umbral inferior  $V_M/3$  después de lo cual se repite el proceso de carga. Los otros constituyentes de un LCO son dos circuitos RC que determinan los procesos de carga, caracterizado por la constante de tiempo  $1/\lambda = (R_\lambda + R_\gamma)C$ , y descarga con constante de tiempo  $1/\gamma = R_\gamma C$ ; finalmente los fotodiodos que emiten un haz luminoso infrarrojo y los fotosensores, estos componentes optoelectrónicos permiten el acoplamiento de los LCOs. La construcción de los LCOs se describe en detalle en [10][11] donde además se describen las observaciones experimentales de enganche de fase y sincronización en diferentes configuraciones.

<sup>1</sup>Agradece el apoyo de la Cooperación Técnica Belga (CTB) y a la Fundación Universitaria David y Alice Van Buuren por el premio académico otorgado.

A continuación se presentan dos modelos que pueden ser adaptados para la descripción de los LCOs en interacción. Primeramente describiremos un modelo lineal<sup>2</sup> muy simple:

$$\begin{aligned} \frac{dV_i(t)}{dt} &= \Lambda_i \epsilon_i(t) - \Gamma_i [1 - \epsilon_i(t)] \\ &+ \sum_{j=1}^N \beta_{ij} \delta_{ij} [1 - \epsilon_j(t)] \quad i, j = 1, \dots, N, \end{aligned} \quad (1)$$

donde  $\Lambda_i$  y  $\Gamma_i$  están relacionadas con las constantes de tiempo  $\lambda_i$  y  $\gamma_i$  mediante  $\Lambda_i = V_{Mi} \lambda_i / 3 \ln 2$  y  $\Gamma_i = V_{Mi} \gamma_i / 3 \ln 2$ . Posteriormente, analizaremos el modelo no lineal que tiene la forma:

$$\begin{aligned} \frac{dV_i(t)}{dt} &= \lambda_i [V_{Mi} - V_i(t)] \epsilon_i(t) - \gamma_i V_i(t) [1 - \epsilon_i(t)] \\ &+ \sum_{j=1}^N \beta_{ij} \delta_{ij} [1 - \epsilon_j(t)] \quad i, j = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (2)$$

en ambos modelos, el acoplamiento entre LCOs está caracterizado por la variable  $\beta_{ij}$  que indica la intensidad del acoplamiento que el LCO<sub>j</sub> ejerce sobre el LCO<sub>i</sub> que a su vez está ligada a la intensidad luminosa recibida por los fotosensores del LCO<sub>i</sub> debido al haz luminoso que emana del LCO<sub>j</sub>, y por ende a la distancia entre los mencionados LCOs. Debemos señalar que para que los LCOs estén acoplados, el haz IR emitido por los fotodiodos de un LCO debe ser captado por los fotosensores de otro(s) LCO(s) lo que no siempre es el caso, para este fin, introducimos la variable  $\delta_{ij}$  para indicar si puede o no haber un acoplamiento efectivo entre los LCOs;  $\delta_{ij} = 1$  si los LCOs pueden interactuar y  $\delta_{ij} = 0$  en cualquier otro caso.

### 3. ANÁLISIS DE LOS MODELOS

Los modelos propuestos en §2 tienen la particularidad de considerar que la descarga de los LCOs es finita, es decir, no es instantánea como consideran los modelos clásicos de osciladores de “integración y disparo” [12]. En otras palabras, los modelos basados en los LCOs son más realistas.

#### 3.1. Modelo Lineal

Este tipo de modelos fueron privilegiados por científicos que estudiaban la sincronización en ciertas especies de luciérnagas como por ejemplo, *Pteroptyx cribellata* [13]. En este artículo, estamos interesados en el estudio del caso más simple en el que nuestro sistema está compuesto por dos LCOs idénticos mutuamente acoplados. En este caso,  $\Lambda_1 = \Lambda_2 = \Lambda$ ,  $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma$ . Consideraremos igualmente que el factor de acoplamiento es simétrico, es decir,  $\beta_{12} = \beta_{21} = \beta$  y dado que los LCOs tienen un acoplamiento mutuo,  $\delta_{12} = \delta_{21} = 1$ , con lo que

(1) toma la forma:

$$\begin{aligned} \frac{dV_1(t)}{dt} &= \Lambda \epsilon_1(t) - \Gamma [1 - \epsilon_1(t)] + \beta [1 - \epsilon_2(t)] \\ \frac{dV_2(t)}{dt} &= \Lambda \epsilon_2(t) - \Gamma [1 - \epsilon_2(t)] + \beta [1 - \epsilon_1(t)]. \end{aligned} \quad (3)$$

La evolución de cada uno de los LCOs con condiciones iniciales  $V_{01}$  y  $V_{02}$  está representada en la Fig. 1(a). Los instantes de “iluminación” y “apagado” están denotados por  $t_F$  y  $t_E$  respectivamente. Considerando (3) para la

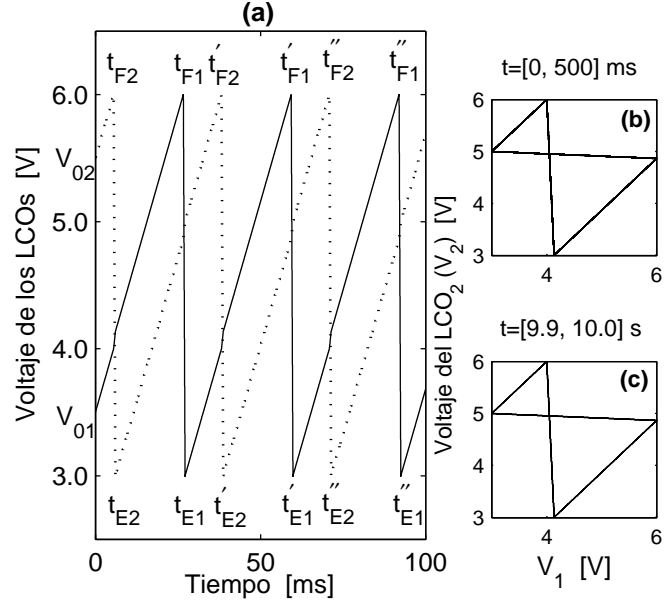


Figura 1. (a) Evolución de las señales de dos LCOs idénticos acoplados. Trayectorias en el espacio de fase para los tiempos (b) [0, 500] ms. (c) [9.9, 10.0] s.

situación mostrada en la Fig. 1, es decir, con  $V_{02} > V_{01}$ , podemos analizar cada región y resolver las ecuaciones para cada LCO con el fin de hallar los respectivos instantes de “iluminación” y “apagado”:

- Para la primera carga del LCO<sub>2</sub>, tenemos  $dV_2/dt = \Lambda$ . Dado que la integración se realiza entre la condición inicial  $V_{02}$  y el umbral superior  $2V_M/3$  correspondientes a  $t = 0$  y  $t = t_{F2}$  respectivamente, la solución nos conduce a:

$$t_{F2} = \frac{1}{\Lambda} \left( \frac{2V_M}{3} - V_{02} \right).$$

- La ec. que describe la primera descarga del LCO<sub>2</sub> es  $dV_2/dt = -\Gamma$  que integrando entre  $2V_M/3$  y el umbral inferior  $V_M/3$ , límites que corresponden a los tiempos  $t_{F2}$  y  $t_{E2}$ , nos permite hallar:

$$t_{E2} = \frac{V_M}{3\Gamma} + t_{F2}$$

- La ecs. de carga para el LCO<sub>1</sub> son:  $dV_1/dt = \Lambda$  para la región comprendida entre  $t = 0$  y  $t_{F2}$ ,  $dV_1/dt = \Lambda + \beta$  en la región donde el LCO<sub>2</sub> actúa

<sup>2</sup>Las denominaciones lineal y no lineal están referidas a la forma de las señales que resultan de la solución del sistema de ecs. diferenciales.

sobre el LCO<sub>1</sub>, es decir, entre  $t_{F2}$  y  $t_{E2}$  y luego nuevamente  $dV_1/dt = \Lambda$  para la región comprendida entre  $t_{E2}$  y  $t_{F1}$ , momento en el que el LCO<sub>1</sub> alcanza  $2V_M/3$ . Resolviendo en conjunto estas ecs. se encuentra que:

$$t_{F1} = \frac{1}{\Lambda} \left[ \frac{2V_M}{3} - V_{01} - \beta(t_{E2} - t_{F2}) \right].$$

- Procediendo de la misma manera en la que se analizó la descarga en el LCO<sub>2</sub>, hallamos:

$$t_{E1} = \frac{V_M}{3\Gamma} + t_{F1}.$$

- El segundo proceso de carga del LCO<sub>2</sub> está descrito por tres ecs. correspondientes a cada una de las regiones mostradas en la Fig. 1, a saber:  $dV_2/dt = \Lambda$  para la región comprendida entre  $t_{E2}$  y  $t_{F1}$ ,  $dV_2/dt = \Lambda + \beta$  en la región donde el LCO<sub>1</sub> actúa sobre el LCO<sub>2</sub>, es decir, entre  $t_{F1}$  y  $t_{E1}$  y luego nuevamente  $dV_2/dt = \Lambda$  para la región comprendida entre  $t_{E1}$  y  $t'_{F1}$ , momento en el cual el LCO<sub>2</sub> alcanza el umbral superior. La integración de estas ecs. nos permite hallar:

$$t'_{F2} = \frac{1}{\Lambda} \left[ \frac{V_M}{3} + \Lambda t_{E2} - \beta(t_{E1} - t_{F1}) \right].$$

- Analizando la segunda descarga del LCO<sub>1</sub> se encuentra:

$$t'_{E2} = \frac{V_M}{3\Gamma} + t'_{F2}.$$

- De manera similar a como se procedió en los puntos precedentes, se encuentra que el LCO<sub>1</sub> alcanza por segunda vez el umbral superior en:

$$t'_{F1} = \frac{1}{\Lambda} \left[ \frac{V_M}{3} + \Lambda t_{E1} - \beta(t'_{E2} - t'_{F2}) \right].$$

Con las expresiones anteriores, podemos calcular la diferencia de fases entre los LCOs que son proporcionales a las diferencias de tiempo en el que los mismos alcanzan el umbral superior, es decir,  $\Delta t_{12} = t_{F1} - t_{F2}$  y  $\Delta t'_{12} = t'_{F1} - t'_{F2}$ . Estas diferencias de tiempo dan:

$$\Delta t_{12} = \Delta t'_{12} = \frac{3\Gamma(V_{02} - V_{01}) - \beta V_M}{3\Lambda\Gamma}. \quad (4)$$

Este resultado nos indica que la diferencia de fases entre los LCOs no cambia en el tiempo, situación que puede ser observada claramente si representamos las trayectorias en el espacio de fases para diferentes tiempos (Fig. 1(b)–(c)) que muestran un carácter estacionario. Lo anterior significa que si los LCOs empiezan en condiciones iniciales tales que no se encienden al mismo tiempo, este modelo indica que los LCOs no llegarán nunca a emitir luz al mismo tiempo, lo cual está en contradicción con los resultados experimentales obtenidos con los LCOs [11] o con otro tipo de osciladores de relajación. Evidentemente, la única forma de que los LCOs emitan luz casi simultáneamente es que las impulsiones cortas estén enganchadas desde el principio, situación que es trivial.

### 3.2. Modelo No Lineal

Este tipo de modelos empezaron a utilizarse ya desde 1928 por van der Pol [14] con el objeto de hacer analogías entre osciladores eléctricos y células cardíacas. En 1975, este tipo de modelo adquiere bastante popularidad con el trabajo de Peskin [15] y en 1990, una refinación del modelo de Peskin realizada por Mirollo y Strogatz [12] hace que los modelos de “integración y disparo” se conviertan en un paradigma en el estudio de osciladores de relajación. En nuestro caso, el modelo no lineal que proponemos y que está en estrecha relación con los aspectos experimentales de los LCOs está dado por (2) que para el caso de dos LCOs idénticos toma la forma:

$$\begin{aligned} \frac{dV_1}{dt} &= \lambda(V_M - V_1)\epsilon_1(t) - \gamma V_1[1 - \epsilon_1(t)] + \beta[1 - \epsilon_2(t)] \\ \frac{dV_2}{dt} &= \lambda(V_M - V_2)\epsilon_2(t) - \gamma V_2[1 - \epsilon_2(t)] + \beta[1 - \epsilon_1(t)], \end{aligned} \quad (5)$$

donde está claro que  $V_1$  y  $V_2$  son dependientes del tiempo. Para el análisis de este modelo, vamos a hacer ciertas simplificaciones con el fin de poder resolver el sistema. La primera de ellas es considerar que la descarga de los LCOs permanece constante, es decir, igual a  $t_\gamma = \ln 2/\gamma$  y la segunda es que para el proceso de carga y cuando uno de los LCOs es afectado por la luz del otro, asumiremos que el acoplamiento es suficientemente mayor en valor absoluto que la constante de tiempo asociada a la carga de una forma tal que sea posible hacer simplificaciones. Así, si consideramos una situación análoga a la Fig. 1, pero con el modelo no lineal (Fig. 2(a)), tendremos que, por ejemplo, la solución de la carga del LCO<sub>1</sub> cuando el mismo está influenciado por el LCO<sub>2</sub> será:

$$V_1(t) = V_1(t_{F2})e^{-\lambda(t-t_{F2})} + \left( V_M + \frac{\beta}{\lambda} \right) \left( 1 - e^{-\lambda(t-t_{F2})} \right), \quad (6)$$

donde  $t_{F2}$  es el instante en el que el LCO<sub>2</sub> comienza a actuar sobre el LCO<sub>1</sub> y  $V_1(t_{F2})$  es el voltaje del LCO<sub>1</sub> al tiempo  $t_{F2}$ . Si aplicamos ahora la simplificación antes mencionada:  $|\beta| > |\lambda|$  y el hecho de que el tiempo en el cual toma lugar la acción de un LCO sobre el otro es muy pequeño, que nos permite hacer la aproximación:  $e^{-\lambda(t-t_{F2})} \approx 1 - \lambda(t-t_{F2})$ . Estas dos simplificaciones finalmente nos conducen a que (6) tome la forma:  $V_1(t) = V_1(t_{F2}) + \beta(t-t_{F2})$  que no está muy alejada de los resultados que se obtienen mediante integración numérica. En lo que sigue, utilizaremos este resultado para el análisis de dos LCOs idénticos. En la Fig. 2(a) se muestra la evolución de las señales de los LCOs utilizando el modelo no lineal y con la particularidad de que los pulsos luminosos están casi superpuestos. Resolviendo analíticamente las ecs. correspondientes, podemos escribir las expresiones para las diferencias de tiempo entre los primeros disparos de los LCOs:

$$\begin{aligned} \Delta t_{12} &= t_{F1} - t_{F2} = \frac{V_M}{3\beta} \frac{V_{02} - V_{01}}{V_M - V_{02}}, \\ \Delta t'_{12} &= t'_{F1} - t'_{F2} = \frac{V_M}{3\beta} \frac{V_{02} - V_{01}}{2V_M - 3V_{02} + V_{01}}. \end{aligned}$$

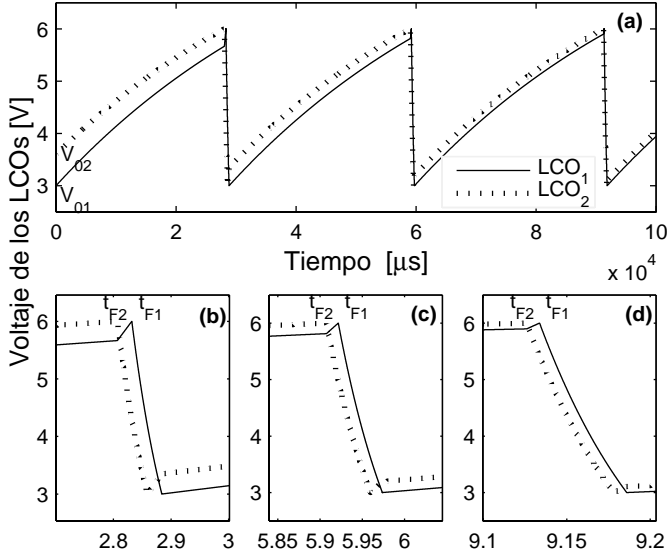


Figura 2. (a) Evolución de las señales de dos LCOs idénticos acoplados cuyos pulsos luminosos se encuentran casi superpuestos. (b)–(d) Vista ampliada de las señales para los tres “disparos”.

Si continuamos el cálculo, llegamos a la expresión para la  $(n + 1)$ ava diferencia de tiempos de disparo:

$$\Delta t_{12}^{(n)} = \frac{V_M}{3\beta} \left[ \frac{V_{02} - V_{01}}{2^{n-1}V_M - (2^n - 1)V_{02} + (2^{n-1} - 1)V_{01}} \right] < t_\gamma. \quad (7)$$

Como habíamos señalado anteriormente, la diferencia de tiempo entre los “disparos” y la diferencia de fase de los LCOs están directamente relacionadas, siendo su expresión:

$$\Delta\phi_{12} = \frac{2\pi}{T}(t_{F1} - t_{F2})$$

Si aplicamos el límite cuando  $n$  tiende a infinito en la diferencia de fases correspondiente a (7), observamos que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{T}{2\pi} \Delta\phi_{12}^{(n)} = 0, \quad (8)$$

lo que indica que la tendencia es hacia la sincronización con diferencia de fase nula.

Ahora, si consideramos la situación mostrada en la Fig. 4(a), podemos resolver las ecs. correspondientes a cada uno de los LCOs y con ellas determinar los tiempos de inicio y fin de los disparos, lo que nos llevará a poder calcular las diferencias de fase entre los LCOs. De inicio no sabemos la tendencia de las diferencias de fase en este caso, es decir,  $\Delta\phi_{12} \gtrless \Delta\phi'_{12}$ . Procediendo al cálculo, tenemos que las soluciones para el primer proceso de carga y descarga del LCO<sub>2</sub> son:

$$V_2 = V_{02}e^{-\lambda t} + V_M(1 - e^{-\lambda t}) \quad \text{y} \quad V_2 = \frac{2}{3}V_M e^{-\gamma(t - t_{F2})}. \quad (9)$$

Mientras que para la primera carga del LCO<sub>1</sub>, la solución es:

$$V_1 = [V_M(1 - e^{-\lambda t_{F2}}) + V_{01}e^{-\lambda t_{F2}} + \beta(t_{E2} - t_{F2})]e^{-\lambda(t - t_{E2})} + V_M(1 - e^{-\lambda(t - t_{E2})}). \quad (10)$$

Con estas expresiones, hallamos que los tiempos de inicio y fin de los disparos para cada uno de los LCOs están dados por:

$$\begin{aligned} t_{F2} &= -\frac{1}{\lambda} \ln \left[ \frac{V_M}{3(V_M - V_{02})} \right], & t_{E2} &= \frac{\ln 2}{\gamma} + t_{F2}, \\ t_{F1} &= -\frac{1}{\lambda} \ln \left[ \frac{\frac{V_M}{3}}{(V_M - V_{01})e^{-\lambda t_{F2}} - \beta(t_{E2} - t_{F2})} \right] + t_{E2}, \\ t_{E1} &= \frac{\ln 2}{\gamma} + t_{F1}. \end{aligned} \quad (11)$$

Continuando con el proceso, se encuentran las expresiones generales:

$$\begin{aligned} t_{F2}^{(n)} &= \frac{1}{\lambda} \ln \left[ 2e^{-\lambda(t_{F1}^{(n-1)} - t_{E2}^{(n-1)})} - \frac{3x}{V_M} \right] + t_{E1}^{(n-1)}, \\ t_{E2}^{(n)} &= \frac{\ln 2}{\gamma} + t_{F2}^{(n)}, \\ t_{F1}^{(n)} &= \frac{1}{\lambda} \ln \left[ 2e^{-\lambda(t_{F2}^{(n)} - t_{E1}^{(n-1)})} - \frac{3x}{V_M} \right] + t_{E2}^{(n)}, \\ t_{E1}^{(n)} &= \frac{\ln 2}{\gamma} + t_{F1}^{(n)}. \end{aligned} \quad (12)$$

Utilizando (12), se pueden calcular las diferencias de fase y dado que  $\Delta\phi_{12} \gtrless \Delta\phi'_{12}$ , se obtiene la desigualdad:

$$(V_{02} - y^+)(V_{02} - y^-) \gtrless 0, \quad (13)$$

donde

$$y^\pm = V_M + \frac{3x}{4V_M}(V_M - V_{01}) \left[ 1 \pm \sqrt{1 + 2 \left( \frac{2V_M}{3x} \right)^2} \right]. \quad (14)$$

Los anteriores resultados se hallaron considerando que  $V_{02} > V_{01}$ . Si repetimos el mismo procedimiento pero con  $V_{01} > V_{02}$ , llegamos a:

$$(V_{02} - z^+)(V_{02} - z^-) \gtrless 0, \quad (15)$$

siendo

$$z^\pm = V_M - \frac{3x}{2V_M}(V_M - V_{01}) \left[ 1 \pm \sqrt{1 + 2 \left( \frac{2V_M}{3x} \right)^2} \right]. \quad (16)$$

El caso más simple para la solución de (13) y (15) es considerar sólo el signo igual de estas desigualdades, es decir,  $(V_{02} - y^+)(V_{02} - y^-) = 0$ , situación que implica que la diferencia de fases permanece constante. Las soluciones están representadas en la Fig. 3(a) donde podemos ver claramente que las únicas soluciones admisibles son  $y^-$  y  $z^+$  y que además las mismas deben estar comprendidas sólo en el intervalo [3.0, 6.0] V puesto que  $V_M = 9.0$  V. Trabajando con las soluciones admisibles, podemos escribir una solución general, en la cual elegimos un “LCO de referencia” cuya condición inicial será dada por  $V_{0\text{ref}}$  y por tanto la condición inicial de anti-sincronización  $V_0$

estará en función de  $V_{0\text{ref}}$ :

$$V_0^\pm = \begin{cases} V_M - \frac{3x}{2V_M}(V_M - V_{0\text{ref}}) \left[ 1 + \sqrt{1 + 2 \left( \frac{2V_M}{3x} \right)^2} \right] \\ \text{si } V_0 < V_{0\text{ref}}, \\ \\ V_M + \frac{3x}{4V_M}(V_M - V_{0\text{ref}}) \left[ 1 - \sqrt{1 + 2 \left( \frac{2V_M}{3x} \right)^2} \right] \\ \text{si } V_0 > V_{0\text{ref}}. \end{cases} \quad (17)$$

Para aclarar aún mas el significado de (17), debemos

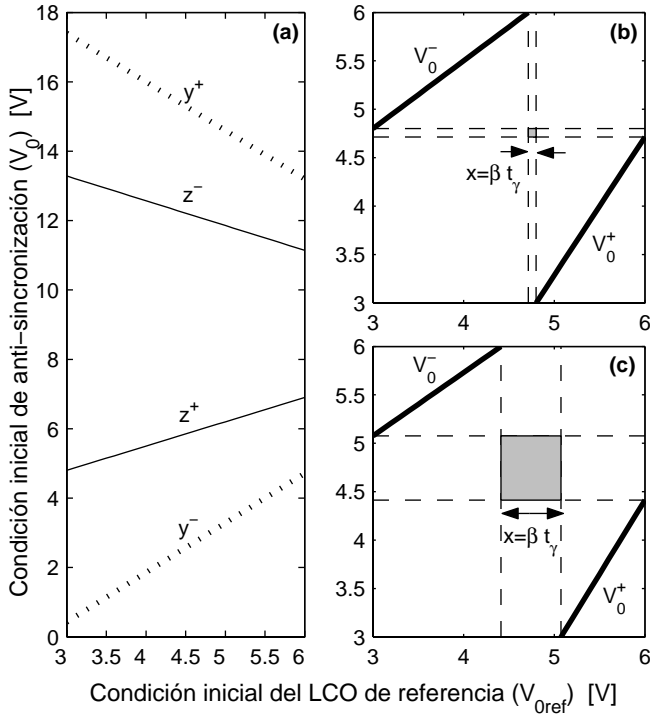


Figura 3. (a) Soluciones considerando el caso de anti-sincronización. Criterio de sincronización para diferentes valores de acoplamiento (b)  $\beta = 166$  y (c)  $\beta = 1270.9$ .

señalar que debido al hecho de considerar que la diferencia de fase es estacionaria,  $\Delta\phi_{12} = \Delta\phi'_{12}$ , (13) y (15) nos conducen a ecuaciones cuadráticas cuyas soluciones están dadas por (14) y (16) respectivamente y por lo tanto, en (17), la solución admisible  $z^+$  está relacionada con  $V_0^+$  cuando  $V_0 < V_{0\text{ref}}$  mientras que la solución  $y^-$  está relacionada con  $V_0^-$  cuando  $V_0 > V_{0\text{ref}}$ ; estas soluciones están representadas en la Fig. 3(b)–(c), en donde además se muestran las áreas (en gris) para diferentes valores de acoplamiento. Estas áreas indican que si las condiciones iniciales están dentro de las mismas, el sistema sincronizará siempre en fase y la anti-sincronización no será posible; las cuales a su vez están determinadas por la intersección de las rectas que parten de los extremos de cada solución, por lo que su expresión puede ser calculada reemplazando  $V_0^- = 2V_M/3$  y  $V_0^+ = V_M/3$  en

(17), permitiéndonos encontrar las abscisas:

$$V_{0\text{ref}}^- = V_M + \frac{4V_M^2}{9x \left( 1 - \sqrt{1 + 2 \left( \frac{2V_M}{3x} \right)^2} \right)}; \quad (18)$$

$$V_{0\text{ref}}^+ = V_M - \frac{4V_M^2}{9x \left( 1 + \sqrt{1 + 2 \left( \frac{2V_M}{3x} \right)^2} \right)}.$$

Por lo que, el lado del cuadrado que representa esta área es

$$x = V_{0\text{ref}}^+ - V_{0\text{ref}}^- = \beta t_\gamma, \quad (19)$$

que se muestra en la Fig. 3(b)–(c). Es evidente que si  $\beta \rightarrow 0$ , el área tenderá a cero también hasta colapsar en un punto significando que si queremos que los dos LCOs idénticos sincronicen en fase, las condiciones iniciales de los mismos deberán ser idénticas. En la Fig. 4(a) se

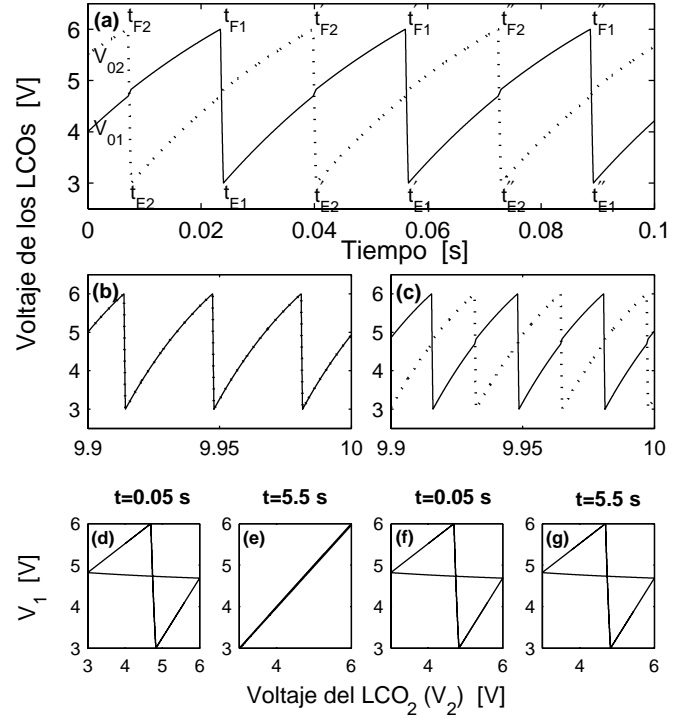


Figura 4. (a) Evolución de las señales de dos LCOs utilizando el modelo no lineal. Posibles comportamientos ulteriores en función de las condiciones iniciales del LCO<sub>2</sub>, sabiendo que  $V_{01} = 4.0$  V y  $\beta = 166$ . (b)  $V_{02} = 5.5178$  V (sincronización en fase) y (c)  $V_{02} = 5.5181$  V (anti-sincronización). Trayectorias en el espacio de fases a diferentes tiempos, (d)–(e) caso síncrono y (f)–(g) caso anti-síncrono.

muestra la evolución de las señales de dos LCOs idénticos acoplados, utilizando el modelo no lineal. Dependiendo de las condiciones iniciales, el sistema puede tender a la sincronización en fase (Fig. 4(b)) o permanecer en un estado estacionario de anti-sincronización (Fig. 4(c)). Las trayectorias en el espacio de fases muestran con claridad que en el caso síncrono, el sistema alcanza un ciclo límite (Fig. 4(e)) que denota la sincronización en fase; mientras que en el caso anti-síncrono, la trayectoria no

se modifica en el tiempo (Fig. 4(g)). También podemos mencionar que el estado anti-síncrono es inestable puesto que cualquier pequeña perturbación hará que el sistema tienda a la sincronización en fase. Si resolvemos

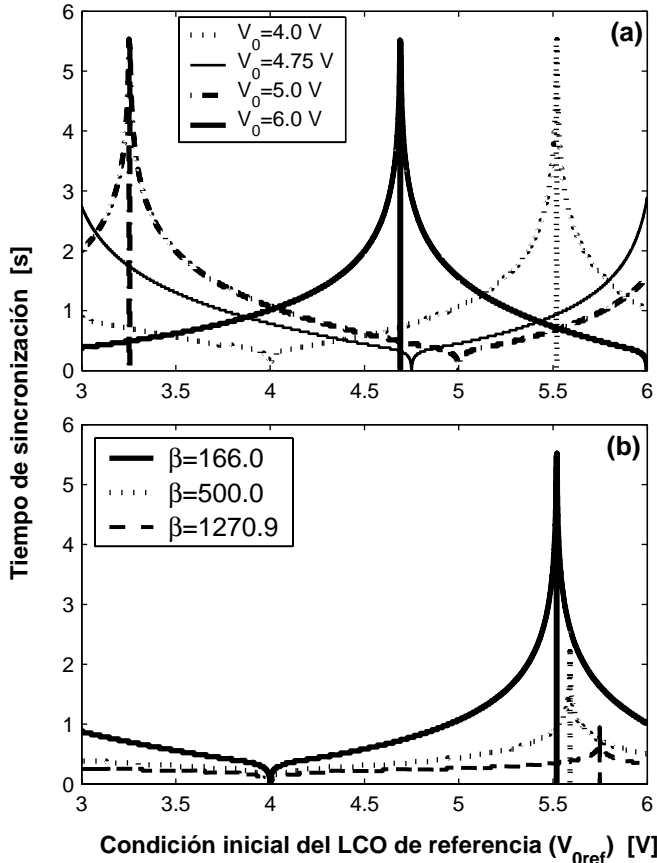


Figura 5. Tiempos de sincronización para dos LCOs idénticos. (a) Diferentes condiciones iniciales  $V_0$  y  $\beta = 166$ . (b) Diferentes valores de acoplamiento  $\beta$  y  $V_0 = 4.0$  V.

numéricamente el sistema, encontramos por ejemplo que el tiempo de sincronización en fase entre dos LCOs idénticos varía con las condiciones iniciales y que si tomamos las mismas de la región de sincronización definida en la Fig. 3(b), por ejemplo,  $V_0 = 4.75$ , vemos que el sistema siempre sincronizará en fase (línea continua delgada en la Fig. 5(a)), en tanto que si  $V_0$  no está comprendida dentro del área de sincronización, existirá un valor para el cual se tiene anti-sincronización que en la Fig. 5 se manifiesta como un tiempo de sincronización que tiende al infinito y que nosotros lo proyectamos hacia el eje de abscisas. La comparación de los resultados analíticos (Fig. 3) con los resultados numéricos (Fig. 5), muestra un buen acuerdo entre los mismos. Finalmente, vemos que el tiempo de sincronización  $t_s$  está relacionado con el acoplamiento  $\beta$  de la forma  $t_s \propto \beta^{-1}$ .

#### 4. CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS

El presente trabajo nos permitió justificar la utilización de un modelo no lineal puesto que el mismo conduce a resultados que tienen coherencia con las observaciones experimentales [16]. Es interesante ver que

a pesar de considerar el sistema más simple posible (dos LCOs idénticos), se observa que las condiciones iniciales son determinantes para que el sistema permanezca en un estado anti-síncrono inestable o tienda hacia la sincronización en fase. A su vez, estas condiciones iniciales juegan un rol importante en el tiempo de sincronización, el cual tiende a infinito cuando las condiciones iniciales toman los valores que hacen que el sistema permanezca en el estado anti-síncrono. La coincidencia entre los valores numéricos y la predicción de los resultados analíticos nos indica que a pesar de las simplificaciones introducidas en el análisis, estas no influyen mayormente en el estado final del sistema. Actualmente estamos desarrollando el análisis de poblaciones de LCOs (ver [17]) cuyos comportamientos presentan gran interés en diversos dominios y observamos nuevamente que dependiendo de las condiciones iniciales, el sistema puede tender a uno o a otro estado entre los que se pueden indicar sincronización total o formación de cúmulos de sincronización.

#### REFERENCIAS

- [1] A. Pikovsky y Y. Maistrenko, eds., *Synchronization: Theory and Application*, vol. 109 of *NATO Science Series II. Mathematics, Physics and Chemistry*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- [2] C. Huygens, *Horologium Oscillatorium*. Paris: Apud F. Muguet, 1673.
- [3] W. H. Eccles y J. H. Vincent, 1920.
- [4] E. V. Appleton, "The automatic synchronization of triode oscillator," *Proc. Cambridge Phil. Soc. (Math. and Phys. Sci.)*, vol. 21, pp. 231–248, 1922.
- [5] B. van der Pol, "On relaxation oscillation," *Phil. Mag.*, vol. 2, pp. 978–992, 1926.
- [6] I. I. Blekhnman, *Synchronization in Science and Technology*. ASME Press (American Society of Mechanical Engineers), 1988.
- [7] V. I. Arnol'd, "Small denominators I. mappings of the circumference onto itself," *Trans. Am. Math. Soc.*, vol. 46, pp. 213–284, 1965.
- [8] V. S. Afraimovich, G. V. Nekorkin, G. V. Osipov, y V. D. Shalfeev, *Stability, Structures and Chaos in Nonlinear Synchronization Networks*, vol. 6 of *World Scientific Series on Nonlinear Science A*. Singapore: World Scientific Pub Co., 1995.
- [9] A. S. Pikovsky y J. Kurths, "Collective behavior in ensembles of globally coupled maps," *Physica D*, vol. 76, no. 4, pp. 411–419, 1994.
- [10] J. L. Guisset, G. M. Ramirez Avila, y J. L. Deneubourg, "Construcción de osciladores controlados por luz y medida de su comportamiento síncrono" *Rev. Bol. Fis.*, vol. 1, no. 7, pp. 102–114, 2001.
- [11] J.-L. Guisset, J.-L. Deneubourg, y G. M. Ramirez Avila, "The phase information associated to synchronized electronic fireflies," *arXiv.nlin.AO/0206036*, no. Mon, 24 Jun 2002 16:07:15 GMT, 2002.
- [12] R. E. Mirollo y S. H. Strogatz, "Synchronization of pulse-coupled biological oscillators," *SIAM J. App. Math.*, vol. 50, no. 6, pp. 1645–1662, 1990.
- [13] J. Buck y E. Buck, "Synchronous fireflies," *Sci. Am.*, vol. 234, no. 5, pp. 74–79, 82–85, 1976.
- [14] B. van der Pol y J. van der Mark, "The heartbeat con-

- sidered as a relaxation oscillation, and an electrical model of the heart," *Phil. Mag.*, vol. 6, pp. 763–775, 1928.
- [15] C. S. Peskin, "Mathematical aspects of heart physiology," 1975.
- [16] G. M. Ramirez Avila, J. L. Guisset, y J. L. Deneubourg, "Synchronization in light-controlled oscillators," *Physica D*, vol. 182, no. 3-4, pp. 254–273, 2003.
- [17] G. M. Ramirez Avila, J. L. Guisset, y J. L. Deneubourg, "Synchronous behavior in small populations of light-controlled oscillators," en *11th International IEEE Workshop on Nonlinear Dynamics of Electronic Systems* (R. Stoop, ed.), (Scuol/Schuls, Switzerland), pp. 201–204, 2003.